Exercices de Géométrie Différentielle 1

Séance 1 - 21/09/2021

1. On pose $B_r := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 < r^2\}$. Montrer que la fonction

$$f : B_r \to \mathbb{R}^n : x \to \frac{rx}{\sqrt{r^2 - |x|^2}}$$

est un difféomorphisme.

2. On considère la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$ dans $\mathbb{R}^n$ définit par

$$\mathbb{S}^{n-1} := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}.$$

Montrer que l'atlas des projections stéréographiques et celui des $2n$ projections orthogonales classiques définissent la même structure de variété lisse.

3. On considère la relation d'équivalence suivante sur $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$:

$$z \sim z' \text{ si et seulement si } \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ z = \lambda z',$$

pour $z, z' \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. On définit l'espace projectif complexe $\mathbb{CP}^n$ comme étant l'espace quotient $\mathbb{CP}^n := \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$.

   (i) Pour tout $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, on définit $U_i := \{[(z_1, \ldots, z_{n+1})] \in \mathbb{CP}^n \mid z_i \neq 0\}$ ainsi que l'application

$$\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n : [(z_1, \ldots, z_{n+1})] \to (\frac{z_1}{z_i}, \cdots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \cdots, \frac{z_{n+1}}{z_i}).$$

   Montrer que $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \{1,\ldots,n+1\}}$ est un atlas lisse sur $\mathbb{CP}^n$ et que la topologie associée à cet atlas est Hausdorff et à base dénombrable.

   (ii) Montrer que l'application

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^n : (z_1, \ldots, z_{n+1}) \to [(z_1, \ldots, z_{n+1})]$$

   est surjective, continue et ouverte. En déduire que $\mathbb{CP}^n$ est compacte pour la topologie associée à l'atlas ci-dessus.

A. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on considère

$$M_a := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = a^2\}.$$

Montrer que M_a peut être munie d'une structure de variété lisse si et seulement si $a \neq 0$.

B. Montrer que l'intérieur d'un ruban de Möbius peut être muni d'une structure de variété lisse de dimension 2.