# Exercices de Géométrie Différentielle 1

## Séance 3 - 12/10/2021

1. On considère la sphère unité $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{R}^3$, avec l'inclusion $\iota : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ qui est lisse. On note $(u, v)$ les coordonnées locales liées à la projection stéréographique suivant le pôle sud, et $p = (0, 0, 1)$ le pôle nord.
   (i) Calculer $\frac{\partial}{\partial u}\big|_p(g)$ et $\frac{\partial}{\partial v}\big|_p(g)$ pour l'application lisse
   $$g : \mathbb{S}^2 \mapsto \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto xe^z.$$
   (ii) Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$, écrire $\frac{\partial}{\partial u}\big|_p(f \circ \iota)$ et $\frac{\partial}{\partial v}\big|_p(f \circ \iota)$ comme combinaison linéaire de $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(p)$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(p)$. Montrer que les coefficients de chaque combinaison linéaire forment un vecteur de $\mathbb{R}^3$ orthogonal à $p$.
   (iii) Montrer, de manière générale, que l'espace tangent à la sphère unité $\mathbb{S}^n$ en n'importe quel point $x \in \mathbb{S}^n$ s'identifie au supplémentaire orthogonal de $x$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, c'est-à-dire :
   $$T_x\mathbb{S}^n \cong \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, x\rangle = 0\},$$
   où $\langle ., .\rangle$ est le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

2. Soient $M, N$ deux variétés lisses. On considère le graphe d'une application lisse $f : M \to N$ :
   $$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in M\}.$$
   Montrer que $\Gamma_f$ possède une structure de variété lisse de même dimension que $M$, expliciter un atlas lisse.

   En particulier, on considère $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ et on note $G := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}^m\}$ son graphe. Montrer que l'espace tangent à $M$ en un point $(x, f(x)) \in G$ s'identifie au graphe de la différentielle usuelle de $f$ en $x$, c'est-à-dire :
   $$T_{(x,f(x))}G \cong \{(v, Df(x).v) \mid v \in \mathbb{R}^m\}.$$

A. Soient $M$ et $N$ deux variétés lisses. Montrer que l'espace tangent au produit direct est canoniquement isomorphe à la somme directe des espaces tangents, c'est-à-dire :
$$T_{(x,y)}(M \times N) \simeq T_xM \oplus T_yN, \quad \text{pour } x \in M, y \in N.$$
En particulier, construire un atlas lisse du tore $\mathbb{T}^2$.

B. On se donne
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \to x^3 + xy + y^3 + 1.$$
Montrer que $f(0, 0), f(1/3, 1/3), f(-1/3, -1/3)$ sont des valeurs régulières de $f$.