Exercices de Géométrie Différentielle 1

Séance 4 - 19/10/2021

1. On considère une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $(\nabla f)(x) \neq 0$ pour tout $x \in M := f^{-1}(\{0\})$.

   (i) Montrer que M admet un atlas $\mathcal{A} = \{(U_{ij}, \varphi_{ij}) \mid 1 \leq i \leq n, j \in J_i\}$, où φ_{ij} est la restriction à U_{ij} de la projection
   $$\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1} : (x_1, ..., x_n) \mapsto (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n).$$

   (ii) Montrer que l'espace tangent à M en un point $p \in M$ s'identifie au supplémentaire orthogonal de $(\nabla f)(p)$ dans $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire
   $$T_pM \cong \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle (\nabla f)(p), v\rangle = 0\}.$$

   (iii) Pour tout $p \in U_{ij}$, calculer le vecteur de $\mathbb{R}^n$ correspondant au vecteur tangent $\frac{\partial}{\partial u_k}\big|_p$ de T_pM si $(u_1, ..., u_{n-1})$ sont les coordonnées locales associées à la carte (U_{ij}, φ_{ij}) définie ci-dessus.

   Indication. On rappelle que les vecteurs tangents peuvent être exprimés comme des dérivations le long de courbes sur la variété.

2. Soient M et N deux variétés lisses. On considère le graphe d'une fonction lisse $f : M \to N$:
   $$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in M\},$$
   qui, pour rappel, possède une structure naturelle de variété lisse. Montrer que l'espace tangent au point $(x, f(x)) \in \Gamma_f$ fixé s'identifie au graphe de la différentielle de f en x, c'est-à-dire :
   $$T_{(x,f(x))}\Gamma_f \cong \{(v, f_{*x}(v)) \mid v \in T_xM\}.$$
   Indication. On rappelle que l'espace tangent à un produit direct de variétés lisses est canoniquement isomorphe à la somme directe des espaces tangents.

A. On considère la nappe d'hyperboloïde
   $$H := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2 = 1, \quad x_1 > 0\}$$
   munie de la topologie induite de $\mathbb{R}^n$ et de la structure de variété lisse définie dans l'exercice 1, pour les ensembles de niveau. Calculer la différentielle de l'application suivante, supposée lisse :
   $$s_0 : \begin{cases} H & \to H \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto (x_1, -x_2, \ldots, -x_n) \end{cases}$$
   appelée la symétrie centrée en $p_0 = (1, 0, \ldots, 0)$.

B. Soient $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ la projection naturelle et $p \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Pour tout $D \in Der_p\mathbb{R}^n$ et $f \in C^\infty(\mathbb{RP}^n)$, on définit

$$\partial f = D(f \circ \pi). \tag{1}$$

1. Montrer que ∂ est une dérivation en $\pi(p)$.
2. En utilisant (1) construire une base de $Der_{[p]}\mathbb{RP}^n$.