Exercices de Géométrie Différentielle 1

Séance 5 - 26/10/2021

1. Soient M et N deux variétés lisses. On considère le graphe d'une fonction lisse $f : M \to N$:
$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in M\},$$
qui, pour rappel, possède une structure naturelle de variété lisse. Montrer que l'espace tangent au point $(x, f(x)) \in \Gamma_f$ fixé s'identifie au graphe de la différentielle de f en x, c'est-à-dire :
$$T_{(x,f(x))}\Gamma_f \cong \{(v, f_{*x}(v)) \mid v \in T_xM\}.$$

2. Montrer que la boule ouvert
$$B := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| < 1\}$$
dans $\mathbb{R}^n$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$. En déduire qu'en chaque point d'une variété de dimension n, il existe une carte (U, φ) en se point tel que $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme.

3. Monter que la différentielle de touts application linéaire entre $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ peux s'identifier naturellement à l'application linéaire elle-même.

A. Calculer la différentielle de
$$f_k : \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C} : z \to z^k.$$

B. On considère $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \to ax + by + cz,\ a, b, c \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Donner une base de $T_{(1,0,0)}\mathbb{S}^2$ et calculer la différentielle de $F|_{\mathbb{S}^2}$ dans cette base.