Exercices de Géométrie Différentielle 1

Séance 6 - 09/11/2021

1. Soient M une n-variété lisse et $p \in M$. On dit que $f_1, \dots, f_k \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ sont indépendante en p si les $(f_j)_{*p}$ sont linéairement indépendant comme élément de $(T_pM)^*$. Montrer que $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ est une application de carte pour un ouvert $U \subset M$ contenant p si et seulement si $x_1, \dots, x_n$ sont indépendant en p.

2. Pour chacune des applications suivantes, vérifier qu'elle est différentiable et en calculer la différentielle en chaque point du domaine.

$$f : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}) : A \mapsto {}^{tr}AA, \tag{1}$$
$$g : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} : A \mapsto \det(A), \tag{2}$$

   où $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille $n \times n$.

3. En utilisant l'exercice 2, montrer que les ensembles suivants possèdent une structure de sous-variété plongée de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$:

$$\mathrm{O}(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid {}^{tr}AA = I_n\}, \tag{3}$$
$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}. \tag{4}$$

A. On considère la sphère unité $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Donnée une base de $T_{(1,0,\dots,0)}\mathbb{S}^n$ et calculer la matrice de la différentielle de $A : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n : x \to -x$.

B. Trouvée une carte de $\mathbb{R}^{n+1}$ adaptée à $\mathbb{S}^n$ en $(1, 0, \dots, 0)$. Montrer que la carte induite sur $\mathbb{S}^n$ est compatible avec $(\mathbb{S}^n \setminus \{(-1, 0, \dots, 0)\}, \varphi_N)$.