Exercices de Géométrie Différentielle 1

Séance 7 - 23/11/2021

1. Calculer la différentielle en chaque point du domaine de

$$g : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} : A \mapsto \det(A).$$

   Puis, montrer que

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\},$$

   possèdent une structure de sous-variété plongée de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

2. Vérifier si l'application lisse suivante est une immersion, submersion, plongement :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (\theta, \phi) \to ((2 + \cos\phi)\cos\theta, (2 + \sin\phi)\sin\theta, \sin\phi) \tag{1}$$

3. Soit M et N deux variété lisse. Montrer qu'il existe un difféomorphisme naturelle

$$T(M \times N) \cong TM \times TN.$$

A. Vérifier si les applications lisses suivantes sont des immersions, submersions, plongements :

$$g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \to xy^2, \tag{2}$$

$$h : \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{RP}^2 : [(x, y)] \to [(x^2, y^2, xy)], \tag{3}$$

$$k_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 : t \to (e^{it}, e^{i\alpha t}), \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

   où, le tore $\mathbb{T}^2$ s'identifie au produit de variétés lisses $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

B. Montrer qu'il existe un difféomorphisme

$$T\mathbb{S}^3 \cong \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3.$$