Exercices de Géométrie Différentielle 1

Séance 9 - 7/12/2021

1. Calculer le flow des champs de vecteur suivant sur $\mathbb{R}^2$:
   a) $A = y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$,
   b) $B = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$,
   c) $C = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$.

2. Soit γ une courbe intégrable maximale non-constante d'un champ de vecteur. Montrer que si γ est non-invective, alors γ est périodique, c'est-à-dire qu'il existe un $T > 0$ telle que $\gamma(t + T) = \gamma(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3. Montrer que pour tout $h \in C^\infty(N)$ et $f : M \to N$ on a
$$f^*dh = d(h \circ f).$$

A. Soit $\omega \in \Omega^1(\mathbb{S}^1)$, qui est la restriction de dx à $\mathbb{S}^1$, c'est-à-dire que
$$\omega(v_1, v_2) = v_1, \quad \text{si } v_1, v_2 \in T_m\mathbb{S}^1.$$
Calculer $f^*\omega$, où $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 : z \to z^2$.

B. Pour tout $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^1(N)$ et $f : M \to N$ on a
$$f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*\omega_1 \wedge f^*\omega_2.$$