Université libre de Bruxelles
2024

Examen blanc

MATH-F211

18 novembre 2024

Nom :

Prénom :

- ◇ Vous ne pouvez apporter à l'examen qu'un stylo et une bouteille d'eau (une boisson).
- ◇ N'apportez pas de papier à l'examen.
- ◇ Cet examen blanc ne couvre environ que les 2/3 de la matière. L'examen réel contiendra également des problèmes concernant la dernière partie du cours.
- ◇ Pour vous tester, essayez de résoudre (et d'écrire clairement !) autant de problèmes que possible en 3 heures.

Ne remplissez qu'au-dessus de cette ligne !

T1	T2	T2	1–5	5–10	11	12	13	14	15	$\sum$

Note :

Partie A

Veuillez écrire vos réponses dans cette partie directement sous chaque exercice.
Temps estimé : 20 min.

Exercice 1 (2P). Finir la définition suivante : Une collection $\mathcal{T}_X$ de sous-ensembles de X est *une topologie sur* X si…

Exercice 2 (2P). Finir la définition suivante : Soit M un ensemble non-vide. Une fonction $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ est une *métrique* si…

Exercice 3 (2P). Formuler le théorème à propos de l'unicité d'un prolongement continu.

Exercice 4 (2P). Formuler le théorème donnant des conditions suffisantes pour que X/G soit Hausdorff, où X est un espace topologique et G un groupe opérant sur X.

Exercice 5 (2P). Finir la définition suivante : Un espace topologique X est dit connexe si…

Partie B

Dans cette partie, choisissez une réponse dans la liste fournie. Vous ne devez pas fournir de solution ou de justification.

Temps estimé : 20 min.

Exercice 6 (2P). Soit $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie cofinie. Le sous-ensemble $\mathbb{Z}$…

[ ] est ouvert dans X.
[ ] est fermé dans X.
[ ] n'est ni ouvert ni fermé dans X.
[ ] a aucun point d'adhérence dans X.

Exercice 7 (2P). On définit la fonction $d\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par

$$d(x,y) := \begin{cases} x-y & \text{si } x \geq y, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

[ ] d est une métrique sur $\mathbb{R}$.
[ ] d n'est pas une métrique sur $\mathbb{R}$ parce que l'inégalité triangulaire n'est pas satisfaite.
[ ] d n'est pas une métrique sur $\mathbb{R}$ parce qu'il existe un $x\in\mathbb{R}$ tel que $d(x,x)\neq 0$.
[ ] d n'est pas une métrique sur $\mathbb{R}$ pour une raison non mentionnée ci-dessus.

Exercice 8 (2P). Soit (M,d) un espace métrique. La boule ouverte $B_1(p)$ de rayon $r=1$ centrée en $m\in M$ est…

[ ] toujours connexe.
[ ] peut être fermé.
[ ] peut ne pas être Hausdorff (par rapport à la topologie induite).
[ ] aucune des réponses ci-dessus ne s'applique.

Exercice 9 (2P). Soit X un espace topologique et $\sim$ une relation d'équivalence sur X. Choisir une vraie affirmation dans la liste suivante :

[ ] Si X est Hausdorff, alors $X/\sim$ est Hausdorff.
[ ] Si U est ouvert dans X, alors $\pi(U)$ est ouvert dans $X/\sim$, où π est la projection canonique.
[ ] Si X est connexe, alors $X/\sim$ est connexe.
[ ] Aucune des réponses ci-dessus ne s'applique.

Exercice 10 (2P). Soit X est un espace topologique. Choisir une vraie affirmation dans la liste suivante :

[ ] Si X est connexe, alors X est localement connexe.
[ ] Si X est connexe par arcs, alors X est localement connexe par arcs.
[ ] Si X est connexe par arcs, alors X est localement connexe.
[ ] Aucune des réponses ci-dessus ne s'applique.

Partie C

Veuillez écrire vos solutions aux exercices des parties C et D sur les feuilles blanches fournies.
Temps estimé : 1 h 20 min.

Exercice 11 (5+5P). Soit (M,d) un espace métrique et soient

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}, \qquad \text{et} \qquad d_2(x,y) = (d(x,y))^2.$$

Démontrer que d_1 est une métrique sur M, mais démontrer que d_2 n'en est pas forcément une.

Exercice 12 (10P). Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ des espaces topologiques et $f, g \colon X \to Y$ des fonctions continues, où $(Y, \mathcal{T}_Y)$ est un espace Hausdorff. Démontrer que l'ensemble

$$E := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

est un fermé de X.

Exercice 13 (10P). Démontrer que l'intervalle $[0, 1]$ muni de la topologie induite de $\mathbb{R}$ est connexe.

Partie D

Temps estimé : 1 h.

Exercice 14 (10P). Soit (M, d) un espace métrique et $A \subset M$ un sous-ensemble quelconque. Pour $m \in M$, posons

$$\rho(m, A) = \inf \{d(m, a) \mid a \in A\}.$$

Démontrer que $\rho(x, A) = 0$ si et seulement si $a \in \bar{A}$.

Exercice 15 (10P). Trouver toutes les composantes connexes de l'espace

$$X = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = A^t, \ \det A \neq 0\},$$

où A^t est la matrice transposée de A et X est muni de la topologie induite de $M_n(\mathbb{R})$.