MATH-F211 : Topologie

TP 1 - Introduction

Thomas Saillez, Andriy Haydys

Exercice 1. Supposons que A et B soient des sous-ensembles d'un ensemble X. Montrer que

$$\big(X \setminus A\big) \cap B = B \setminus A.$$

Exercice 2. Supposons que $A,\ B$ soient des sous-ensembles de X et C, D soient des sous-ensembles de Y. Montrer que

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B), \qquad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B),$$
$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D), \qquad f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D),$$
$$f(X \setminus A) \supset f(X) \setminus f(A), \qquad f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C),$$
$$f^{-1}\big(f(A)\big) \supset A.$$

En plus, trouver des exemples tels que les inclusions dans les formules en bleue sont strictes.

Exercice 3. Donnez toutes les topologies possibles sur :

(a) $X = \{a, b\}$,

(b) $X = \{a, b, c\}$.

Exercice 4. Soit $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ où $\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y$ sont les topologies cofinies de X et Y respectivement. On suppose que f n'est pas une fonction constante.

Montrer que f est continue ssi pour tout $y \in Y$ l'ensemble $\{x \in X | f(x) = y\}$ est fini.

Exercice 5. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique où $\mathcal{T} = \{\emptyset, A, B, X\}$ où A et B sont des sous-ensembles propres de X et $A \neq B$. Quelles sont les conditions sur A et B ?

1 Exercices frigo

Exercice 6. Soit τ l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui sont soit $\mathbb{R}$, soit $\emptyset$, soit de la forme $]a; +\infty[$ pour un $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que $(\mathbb{R}, \tau)$ est un espace topologique.

Exercice 7. On pose $X = \{a, b, c, d\}$ et $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$. On considère l'espace topologique $(X, \mathcal{T})$.

On pose $f : X \to X$ la fonction telle que $f(a) = b, f(b) = d, f(c) = b$ et $f(d) = c$.

Montrer que l'application f est discontinue, mais que tous la préimage de tout ouvert contenant d est ouverte.