

MATH-F211 : Topologie

TP 2 - Espaces métriques

Thomas Saille, Andriy Haydys

Exercice 1. Soit (M, d) un espace métrique et $x, y \in M$. On note $d(x, y) = 2r$. Démontrer que les boules $B(x, r)$ et $B(y, r)$ sont disjointes.

Exercice 2. Soit (M, d) un espace métrique et $k > 0$ et soient

$$d_1(x, y) = kd(x, y),$$

$$d_2(x, y) = \min(1, d(x, y)),$$

$$d_3(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)},$$

$$d_4(x, y) = (d(x, y))^2.$$

Démontrer que d_1, d_2 et d_3 sont des métriques mais démontrer que d_4 n'en est pas forcément une.

Exercice 3. La métrique parisienne d_P sur \mathbb{R}^2 est définie par les règles suivantes: si la droite qui passe par x et y passe par 0, alors $d_P(x, y) = \|x - y\|$, sinon $d_P(x, y) = \|x\| + \|y\|$.

Vérifier qu'il s'agit bien d'une métrique.

(Le nom de cette métrique vient d'une particularité des chemins de fer français.)

Exercice 4. Existe-t-il un espace métrique M avec plus d'un point mais les seuls ouverts sont M et \emptyset ?

Exercice 5. Démontrer que le rectangle $]a, b[\times]c, d[\subset \mathbb{R}^2$ est ouvert pour la métrique euclidienne.

Exercice 6. Démontrer que dans un espace métrique, un ensemble est ouvert ssi il est une union de boules ouvertes.

1 Exercices frigo

Exercice 7. Démontrer que dans un espace métrique les boules ouvertes sont ouvertes.

Exercice 8. Soit (M, d) un espace métrique, $x, y \in M$ et $r, s > 0$. Est-ce que $B(x, r) = B(y, s)$ implique $x = y$? Et $r = s$?