MATH-F211 : Topologie

TP 5 - Homéomorphismes et topologie quotient

Thomas Saillez, Andriy Haydys

Exercice 1 (2.1.10)**.** Quelles lettres de l'alphabet latin sont homéomorphes ? On utilise une police sans-serif. La topologie utilisée correspond à celle de sous-espace de $\mathbb{R}^2$ comme écrit sur la feuille.

A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P,Q,R,S,T,U,V,W,X,Y,Z

Il y a deux cas:

1. Si on suppose que les lettres sont infiniments fines, par exemple le I est l'ensemble $\{0\} \times [0, 1]$.
2. Si on suppose que les lettres sont épaisses, par exemple le I est l'ensemble $[0, \epsilon] \times [0, 1]$.

Exercice 2. Donner un homéomorphisme entre $\mathbb{R}^2$ et $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Donner un exemple où l'application identité n'est pas un homéomorphisme.

Exercice 4. Soit X un ensemble muni de sa topologie cofinie. Démontrer que toute bijection $f : X \to X$ est un homéomorphisme.

Exercice 5 (2.3.1)**.** Soient X un espace topologique et $\simeq$ une relation d'équivalence sur X. On suppose également qu'on a une relation d'équivalence $\sim$ sur $X/\simeq$. On définit alors une troisième relation d'équivalence $\doteq$ sur X par $x \doteq y \leftrightarrow [x] \sim [y]$. Démontrer que $X/\doteq$ est homéomorphe à $(X/\simeq)/\sim$.

Exercice 6 (2.3.2)**.** Soient X et Y des espaces topologiques. On pose la relation d'équivalence suivante sur $X \times Y$: $(x, y) \simeq (r, s) \leftrightarrow x = r$. Démontrer que l'espace quotient $X \times Y/\simeq$ est homéomorphe à Y.

Exercices frigo

Exercice 7. Donner un exemple d'espace non-Hausdorff X muni d'une relation d'équivalence tel que $X/\sim$ soit Hausdorff.

Exercice 8. Sur $\bar{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ on définit une relation d'équivalence par

$$(x, y) \sim (0, 1) \qquad \text{lorsque} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Démontrer que $\bar{D}/\sim$ et S^2 sont homéomorphe.