

## Partie B

Dans cette partie, choisissez une réponse dans la liste fournie. Vous ne devez pas fournir de solution ou de justification.

Temps estimé : 20 min.

**Exercice 1** (2P). Soit  $X = \mathbb{R}$  muni de la topologie cofinie. La fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ ,  $f(x) = \sin x \dots$

- ☐ est continue.
- ☐ est ouverte.
- ☒ est fermée.
- ☐ n'a aucune des propriétés listées précédemment.

**Exercice 2** (2P). On définit la fonction  $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par  $d(x, y) := |x^4 - y^4|$ . Choisir une vraie affirmation dans la liste suivante :

- ☐  $d$  est une métrique sur  $\mathbb{R}$ .
- ☐  $d$  n'est pas une métrique sur  $\mathbb{R}$  parce que l'inégalité triangulaire n'est pas satisfaite.
- ☐  $d$  n'est pas une métrique sur  $\mathbb{R}$  parce qu'il existe un  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $d(x, x) \neq 0$ .
- ☒  $d$  n'est pas une métrique sur  $\mathbb{R}$  pour une raison non mentionnée ci-dessus.

**Exercice 3** (2P). Soit  $X$  un espace qui consiste de deux points distincts :  $X = \{a, b\}$ . Considérons  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ . Choisir une vraie affirmation dans la liste suivante :

- ☐  $\mathcal{T}$  n'est pas une topologie sur  $X$ .
- ☐  $\mathcal{T}$  est une topologie Hausdorff.
- ☐  $\mathcal{T}$  n'est pas une topologie Hausdorff, mais tout singleton dans  $X$  est fermé.
- ☒ Aucune des réponses ci-dessus n'est vraie.

**Exercice 4** (2P). Soit  $\mathbb{T}$  le tore et  $A \subset \mathbb{T}$  un sous-ensemble fini non-vide. Choisir une vraie affirmation dans la liste suivante :

- ☐  $\mathbb{T} \setminus A$  est connexe seulement dans le cas où  $A$  contient un point.
- ☐  $\mathbb{T} \setminus A$  est connexe seulement dans le cas où  $A$  contient un ou deux points.
- ☒  $\mathbb{T} \setminus A$  est toujours connexe.
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus n'est vraie.

**Exercice 5** (2P). Soit  $\mathbb{RP}^n$  l'espace projectif. Choisir une vraie affirmation dans la liste suivante :

- ☒  $\mathbb{RP}^n$  est compact, connexe et Hausdorff.
- ☐  $\mathbb{RP}^n$  est compact et connexe, mais il n'est pas Hausdorff.
- ☐  $\mathbb{RP}^n$  est compact et Hausdorff, mais il n'est pas connexe.
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus n'est vraie.

## Partie D

*Temps estimé : 1 h.*

**Exercice 6** (10P). Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $f: X \rightarrow [0, 1]$  une fonction. On munit  $[0, 1]$  avec la topologie induite de  $\mathbb{R}$ . Démontrer que  $f$  est continue si et seulement si  $f^{-1}([0, a])$  et  $f^{-1}((b, 1])$  sont des ouverts de  $X$  pour tous  $a, b \in (0, 1)$ .

Supposons que  $f$  est continue. Puisque  $[0, a]$  et  $(b, 1]$  sont des ouverts de  $[0, 1]$  par rapport à la topologie induite, alors  $f^{-1}([0, a])$  et  $f^{-1}((b, 1])$  sont des ouverts de  $X$ .

Supposons maintenant que  $f^{-1}([0, a])$  et  $f^{-1}((b, 1])$  sont des ouverts de  $X$  pour tous  $a, b \in (0, 1)$ . Notons que chaque intervalle  $(a, b) \subset (0, 1)$  peut être représenté comme l'intersection  $[0, b] \cap (a, 1]$ . Puisque  $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$  pour une fonction  $f$  quelconque, alors

$$f^{-1}((a, b)) = f^{-1}([0, b] \cap (a, 1]) = f^{-1}([0, b]) \cap f^{-1}((a, 1])$$

est un ouvert de  $X$  comme l'intersection de deux ouverts.

Notons que

$$\mathcal{B} = \{[0, a] \mid a \in (0, 1)\} \cup \{(a, b) \mid a, b \in (0, 1), a < b\} \cup \{(b, 1] \mid b \in (0, 1)\} \cup \{[0, 1]\}$$

est une base de  $[0, 1]$ . En effet, pour un espace topologique  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  quelconque, une base  $\mathcal{B}_Y$  de  $\mathcal{T}_Y$  et un sous-espace  $Y_0 \subset Y$ ,

$$\{B \cap Y_0 \mid B \in \mathcal{B}_Y\}$$

est une base de  $Y_0$  par rapport à la topologie induite. Donc,  $\mathcal{B}$  est une base de  $[0, 1]$  comme l'intersection de membres de la base  $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$  avec  $Y_0 = [0, 1]$ .

Remarquons qu'une fonction  $f: X \rightarrow [0, 1]$  est continue si et seulement si  $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$  pour tout membre d'une base de la topologie de  $[0, 1]$ . Ainsi, puisque  $f^{-1}(B)$  est ouvert dans  $X$  pour tout  $B \in \mathcal{B}$ ,  $f$  est continue.

**Exercice 7** (10P). Soit  $f: S^1 \rightarrow S^1$  une application continue telle que  $f(p_0) = p_0$ , où  $p_0 = (1, 0)$ . Supposons que le morphisme induit  $f_*: \pi_1(S^1, p_0) \rightarrow \pi_1(S^1, p_0)$  est trivial. Démontrer que  $f$  est homotope à l'application constante, c'est-à-dire, il existe une application  $h: S^1 \times I \rightarrow S^1$  continue telle que

$$\begin{aligned} h(p, 0) &= f(p) & \forall p \in S^1, \\ h(p, 1) &= p_0 & \forall p \in S^1, \\ h(p_0, s) &= p_0 & \forall s \in I. \end{aligned} \tag{1}$$

Considérons  $S^1$  comme  $[0, 1]/\sim$  avec  $0 \sim 1$ . Si  $\pi: [0, 1] \rightarrow S^1$  est la projection canonique, notons  $\gamma := f \circ \pi: [0, 1] \rightarrow S^1$ .

Considérons  $\gamma$  comme un chemin dans  $S^1$ . Pour le revêtement universel  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  il existe un unique relèvement  $\hat{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\hat{\gamma}(0) = 0 \in p^{-1}(p_0)$ . Puisque  $\gamma$  est trivial dans  $\pi_1(S^1, p_0)$

par hypothèse, on obtient par un théorème du cours, que  $\hat{\gamma}(1) = 0$ . Donc,  $\hat{\gamma}$  est un lacet dans  $\mathbb{R}$ . Comme  $\mathbb{R}$  est simplement connexe, il existe une homotopie

$$\begin{aligned} \hat{h}: [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} && \text{telle que} \\ \hat{h}(t, 0) = \hat{\gamma}(t), \quad \hat{h}(t, 1) &= 0 && \text{pour tout } t \in [0, 1], \\ \hat{h}(0, s) = 0 = \hat{h}(1, s) &&& \text{pour tout } s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Ceci implique que  $\tilde{h} := p \circ \hat{h}: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^1$  vérifie

$$\begin{aligned} \tilde{h}(t, 0) = \gamma(t), \quad \tilde{h}(t, 1) &= p_0 && \text{pour tout } t \in [0, 1], \\ \tilde{h}(0, s) = p_0 = \tilde{h}(1, s) &&& \text{pour tout } s \in [0, 1]. \end{aligned} \tag{2}$$

Considérons  $S^1 \times I$  comme le quotient  $[0, 1] \times [0, 1] / \sim$  avec  $(0, s) \sim (1, s)$  pour tout  $s \in [0, 1]$ . Soit  $\rho: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^1 \times [0, 1]$  la projection canonique. Alors, par la propriété universelle du quotient, il existe une application  $h: S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$  continue telle que  $h \circ \rho = \tilde{h}$ . Les équations (2) impliquent (1).