Université libre de Bruxelles
2025

Examen

MATH-F211

24 janvier 2025

Nom :

Prénom :

- ◇ Vous ne pouvez apporter à l'examen qu'un stylo et une bouteille d'eau (une boisson). N'apportez pas de trousse, de règle, de tipp-ex, de smartphone, de smartwatch ou d'autres appareils électroniques.
- ◇ N'apportez pas de papier à l'examen.
- ◇ L'examen dure 3 heures. Bien sûr, vous pouvez partir plus tôt si vous avez terminé. Dans ce cas-là, levez la main et restez assis.
- ◇ **Ne commencez qu'après l'autorisation !**

Ne remplissez qu'au-dessus de cette ligne !

1–5	5–10	11	12	13	14	15	$\sum$

Note :

Partie A

Veuillez écrire vos réponses dans cette partie directement sous chaque exercice.
Temps estimé : 20 min.

Exercice 1 (2P). Finir la définition suivante : Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. *Une base de la topologie* est…

Exercice 2 (2P). Finir la définition suivante : Un espace topologique $(X, \mathcal{T}_X)$ est dit *connexe*, si…

Exercice 3 (2P). Formuler le théorème des valeurs extrêmes (pour les fonctions sur un espace compact).

Exercice 4 (2P). Formuler le critère automatique d'homéomorphisme (conditions sur X et Y qui impliquent que toute application $f\colon X \to Y$ bijective et continue est un homéomorphisme).

Exercice 5 (2P). Donner la définition d'un revêtement.

Partie B

Dans cette partie, choisissez une réponse dans la liste fournie. Vous ne devez pas fournir de solution ou de justification.
Temps estimé : 20 min.

Exercice 6 (2P). Soit $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie cofinie. La fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x\ldots$

[ ] est continue.
[ ] est ouverte.
[ ] est fermée.
[ ] n'a aucune des propriétés listées précédemment.

Exercice 7 (2P). On définit la fonction $d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $d(x, y) := |x^4 - y^4|$. Choisir une vraie affirmation dans la liste suivante :

[ ] d est une métrique sur $\mathbb{R}$.
[ ] d n'est pas une métrique sur $\mathbb{R}$ parce que l'inégalité triangulaire n'est pas satisfaite.
[ ] d n'est pas une métrique sur $\mathbb{R}$ parce qu'il existe un $x \in \mathbb{R}$ tel que $d(x, x) \neq 0$.
[ ] d n'est pas une métrique sur $\mathbb{R}$ pour une raison non mentionnée ci-dessus.

Exercice 8 (2P). Soit X un espace qui consiste de deux points distincts : $X = \{a, b\}$. Considérons $\mathcal{T} = \big\{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}\big\}$. Choisir une vraie affirmation dans la liste suivante :

[ ] $\mathcal{T}$ n'est pas une topologie sur X.
[ ] $\mathcal{T}$ est une topologie Hausdorff.
[ ] $\mathcal{T}$ n'est pas une topologie Hausdorff, mais tout singleton dans X est fermé.
[ ] Aucune des réponses ci-dessus n'est vraie.

Exercice 9 (2P). Soit $\mathbb{T}$ le tore et $A \subset \mathbb{T}$ un sous-ensemble fini non-vide. Choisir une vraie affirmation dans la liste suivante :

[ ] $\mathbb{T} \setminus A$ est connexe seulement dans le cas où A contient un point.
[ ] $\mathbb{T} \setminus A$ est connexe seulement dans le cas où A contient un ou deux points.
[ ] $\mathbb{T} \setminus A$ est toujours connexe.
[ ] Aucune des réponses ci-dessus n'est vraie.

Exercice 10 (2P). Soit $\mathbb{RP}^n$ l'espace projectif. Choisir une vraie affirmation dans la liste suivante :

[ ] $\mathbb{RP}^n$ est compact, connexe et Hausdorff.
[ ] $\mathbb{RP}^n$ est compact et connexe, mais il n'est pas Hausdorff.
[ ] $\mathbb{RP}^n$ est compact et Hausdorff, mais il n'est pas connexe.
[ ] Aucune des réponses ci-dessus n'est vraie.

Partie C

Veuillez écrire vos solutions aux exercices des parties C et D sur les feuilles blanches fournies.
Temps estimé : 1 h 20 min.

Exercice 11 (10P). Soit (M, d) un espace métrique et A et B deux sous-ensembles compacts disjoints. Démontrer qu'il existe des ouverts U et V disjoints tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

Exercice 12 (10P). Soit X un espace topologique et $A \subset X$ un sous-espace connexe. Démontrer que $\bar{A}$ est connexe aussi.

Exercice 13 (10P). Démontrer que le produit de deux espaces compacts est un espace compact.

Partie D

Temps estimé : 1 h.

Exercice 14 (10P). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $f \colon X \to [0,1]$ une fonction. On munit $[0,1]$ avec la topologie induite de $\mathbb{R}$. Démontrer que f est continue si et seulement si $f^{-1}\big([0,a)\big)$ et $f^{-1}\big((b,1]\big)$ sont des ouverts de X pour tous $a, b \in (0,1)$.

Exercice 15 (10P). Soit $f \colon S^1 \to S^1$ une application continue telle que $f(p_0) = p_0$, où $p_0 = (1,0)$. Supposons que le morphisme induit $f_* \colon \pi_1(S^1, p_0) \to \pi_1(S^1, p_0)$ est trivial. Démontrer que f est homotope à l'application constante, c'est-à-dire, il existe une application $h \colon S^1 \times I \to S^1$ continue telle que

$$\begin{aligned} h(p,0) &= f(p) && \forall p \in S^1, \\ h(p,1) &= x_0 && \forall p \in S^1, \\ h(x_0,s) &= x_0 && \forall s \in I. \end{aligned}$$