Université libre de Bruxelles
2024

CORRIGÉ

Examen blanc

MATH-F211

18 décembre 2024

Nom :

Prénom :

- ◇ Vous ne pouvez apporter à l'examen qu'un stylo et une bouteille d'eau (une boisson).
- ◇ N'apportez pas de papier à l'examen.
- ◇ Cet examen blanc ne couvre environ que les 2/3 de la matière. L'examen réel contiendra également des problèmes concernant la dernière partie du cours.
- ◇ Pour vous tester, essayez de résoudre (et d'écrire clairement !) autant de problèmes que possible en 3 heures.

Ne remplissez qu'au-dessus de cette ligne !

T1	T2	T2	1–5	5–10	11	12	13	14	15	$\sum$

Note :

Partie A

Veuillez écrire vos réponses dans cette partie directement sous chaque exercice.
Temps estimé : 20 min.

Exercice 1 (2P). Finir la définition suivante : Une collection $\mathcal{T}_X$ de sous-ensembles de X est *une topologie sur* X si…

Le syllabus, page 11.

Exercice 2 (2P). Finir la définition suivante : Soit M un ensemble non-vide. Une fonction $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ est une *métrique* si…

Page 28.

Exercice 3 (2P). Formuler le théorème à propos de l'unicité d'un prolongement continu.

Page 99.

Exercice 4 (2P). Formuler le théorème donnant des conditions suffisantes pour que X/G soit Hausdorff, où X est un espace topologique et G un groupe opérant sur X.

Page 107.

Exercice 5 (2P). Finir la définition suivante : Un espace topologique X est dit connexe si...

Page 112.

Partie B

Dans cette partie, choisissez une réponse dans la liste fournie. Vous ne devez pas fournir de solution ou de justification.

Temps estimé : 20 min.

Exercice 6 (2P). Soit $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie cofinie. Le sous-ensemble $\mathbb{Z}$...

[ ] est ouvert dans X.
[ ] est fermé dans X.
[X] n'est ni ouvert ni fermé dans X.
[ ] a aucun point d'adhérence dans X.

Exercice 7 (2P). On définit la fonction $d\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par

$$d(x,y) := \begin{cases} x-y & \text{si } x \geq y, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

[ ] d est une métrique sur $\mathbb{R}$.
[ ] d n'est pas une métrique sur $\mathbb{R}$ parce que l'inégalité triangulaire n'est pas satisfaite.
[ ] d n'est pas une métrique sur $\mathbb{R}$ parce qu'il existe un $x\in\mathbb{R}$ tel que $d(x,x)\neq 0$.
[X] d n'est pas une métrique sur $\mathbb{R}$ pour une raison non mentionnée ci-dessus.

Exercice 8 (2P). Soit (M,d) un espace métrique. La boule ouverte $B_1(p)$ de rayon $r=1$ centrée en $m\in M\dots$

[ ] est toujours connexe.
[X] peut être fermé.
[ ] peut ne pas être Hausdorff (par rapport à la topologie induite).
[ ] aucune des réponses ci-dessus ne s'applique.

Exercice 9 (2P). Soit X un espace topologique et $\sim$ une relation d'équivalence sur X. Choisir une vraie affirmation dans la liste suivante :

[ ] Si X est Hausdorff, alors $X/\sim$ est Hausdorff.
[ ] Si U est ouvert dans X, alors $\pi(U)$ est ouvert dans $X/\sim$, où π est la projection canonique.
[X] Si X est connexe, alors $X/\sim$ est connexe.
[ ] Aucune des réponses ci-dessus ne s'applique.

Exercice 10 (2P). Soit X est un espace topologique. Choisir une vraie affirmation dans la liste suivante :

[ ] Si X est connexe, alors X est localement connexe.
[ ] Si X est connexe par arcs, alors X est localement connexe par arcs.
[ ] Si X est connexe par arcs, alors X est localement connexe.
[X] Aucune des réponses ci-dessus ne s'applique.

Partie C

Veuillez écrire vos solutions aux exercices des parties C et D sur les feuilles blanches fournies.
Temps estimé : 1 h 20 min.

Exercice 11 (5+5P). Soit (M,d) un espace métrique et soient

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}, \qquad \text{et} \qquad d_2(x,y) = (d(x,y))^2.$$

Démontrer que d_1 est une métrique sur M, mais démontrer que d_2 n'en est pas forcément une.

Corrigé. Puisque $d(x,x) = 0$, on a $d_1(x,x) = 0$ pour tout $x \in M$. Inversement, si $d_1(x,y) = 0$, alors $d(x,y) = 0$ et donc $x = y$.

d_1 est évidemment symétrique. Pour démontrer l'inégalité triangulaire, on note que la fonction $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ définie par $f(t) = t/(1+t)$ est croissante et satisfait la propriété

$$f(s+t) = \frac{t+s}{1+t+s} = \frac{t}{1+t+s} + \frac{s}{1+t+s} \leq \frac{t}{1+t} + \frac{s}{1+s} = f(s) + f(t). \tag{1}$$

Par conséquent, pour tout $z \in M$ on a

$$d_1(x,y) = f\big(d(x,y)\big) \leq f\big(d(x,z) + d(z,y)\big) \leq f\big(d(x,z)\big) + f\big(d(z,y)\big) = d_1(x,z) + d_1(z,y),$$

où la première inégalité suit de la croissance de f et la deuxième de (1). Ainsi, d_1 est une métrique sur M.

Il suffit de démontrer que $d_2(x,y) = (x-y)^2$ n'est pas une métrique sur $\mathbb{R}$. En effet, pour $x = 0, y = 4$ et $z = 2$ on a

$$d_2(0,4) = 16 \qquad \text{et} \qquad d_2(0,2) + d_2(2,4) = 8.$$

Donc, d_2 ne satisfait pas l'inégalité triangulaire et n'est alors pas une métrique.

Exercice 12 (10P). Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ des espaces topologiques et $f, g\colon X \to Y$ des fonctions continues, où $(Y, \mathcal{T}_Y)$ est un espace Hausdorff. Démontrer que l'ensemble

$$E := \big\{x \in X \mid f(x) = g(x)\big\}$$

est un fermé de X.

Corrigé. Le syllabus, page 98.

Exercice 13 (10P). Démontrer que l'intervalle $[0,1]$ muni de la topologie induite de $\mathbb{R}$ est connexe.

Corrigé. Le syllabus, page 134.

Partie D

Temps estimé : 1 h.

Exercice 14 (10P). Soit (M,d) un espace métrique et $A \subset M$ un sous-ensemble quelconque. Pour $m \in M$, posons

$$\rho(m,A) = \inf\big\{d(m,a) \mid a \in A\big\}.$$

Démontrer que $\rho(m,A) = 0$ si et seulement si $m \in \bar{A}$.

Corrigé. Supposons que $\rho(m,A) = 0$. Donc, il existe une suite (a_n) dans A tq la suite $\big(d(m,a_n)\big)$ converge vers $0 \in \mathbb{R}$, càd (a_n) converge vers m. Il suit que $B_r(m) \cap A \neq \varnothing$ pour tout $r > 0$ et donc $m \in \bar{A}$.

Inversement, si $m \in \bar{A}$, il existe une suite (a_n) dans A qui converge vers m. Donc, la suite $\big(d(m,a_n)\big)$ converge vers 0 et alors $\rho(m,A) = 0$.

Exercice 15 (10P). Trouver toutes les composantes connexes de l'espace

$$X = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = A^t,\ \det A \neq 0\},$$

où A^t est la matrice transposée de A et X est muni de la topologie induite de $M_n(\mathbb{R})$.

Corrigé. Tout d'abord, notons que l'espace vectoriel

$$Y = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = A^t\ \},$$

est isomorphe à $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$. De plus, $\det\colon Y \to \mathbb{R}$ est continue en tant qu'une fonction polynomiale. Alors, $X \subset Y$ est ouvert parce que $X = \det^{-1}(J)$, où $J = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est ouvert. En particulier, X est une variété topologique (de la dimension $n(n+1)/2$). Par conséquent, les composantes connexes de X et les composantes connexes par arcs sont égales.

Rappelons que la signature de A est définie par

$$\operatorname{sgn} A = \text{ le nombre de valeurs propres positives} = \dim V_{max} \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

où V_{max} est un espace vectoriel maximal parmi les sous-espaces vectoriels V de $\mathbb{R}^n$ tq $\langle Av, v\rangle > 0$ lorsque $v \in V, v \neq 0$.

Soit S_{max} la sphère dans V_{max}, càd $S_{max} = \{v \in V_{max} \mid \|v\| = 1\}$. Puisque S_{max} est compact et la fonction $S_{max} \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \langle Av, v\rangle$ est continue et strictement positive, il existe $\underline{\lambda} > 0$ tq

$$\langle Av, v\rangle \geq \underline{\lambda} \qquad \forall v \in S_{max}.$$

Si $B \in Y$ satisfait $\|B\|^2 = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}^2 < \varepsilon^2$, on obtient

$$\langle Bv, v\rangle \leq \|B\|\|v\| \leq \varepsilon \qquad \text{si } v \in S_{max}.$$

De coup, si $\varepsilon < \underline{\lambda}$, la fonction

$$S_{max} \to \mathbb{R}, \qquad v \mapsto \big\langle (A+B)v, v\big\rangle$$

est strictement positive et donc $\operatorname{sgn}(A+B) \geq \operatorname{sgn} A$.

De la même manière, on obtient aussi $\operatorname{sgn}(A+B) \leq \operatorname{sgn} A$ si $\|B\|$ est suffisamment petite (en considérant l'espace vectoriel maximal sur lequel A est définie négative). Donc, l'application $A \mapsto \operatorname{sgn} A$ est constante sur un voisinage d'une matrice $A_0 \in X$. En particulier, si on munit $\{0, 1, \ldots, n\}$ de la topologie discrète, l'application $\operatorname{sgn}\colon X \to \{0, 1, \ldots, n\}$ est continue et (évidemment) surjective. Donc, X a au moins $n+1$ composantes connexes representés par

$$E_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \quad E_{n-1} := \begin{pmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \ldots, E_0 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant l'induction par rapport à n, on va démontrer l'affirmation suivante : si $\operatorname{sgn} A = p$, alors il existe un chemin joignant A et E_p (qui implique que $X_p := \{A \in X \mid \operatorname{sgn} A = p\}$ est connexe (par arcs)).

Tout d'abord, pour $n = 1$ on a $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et dans ce cas-là l'affirmation est évidente.

Soit $n > 0$ quelconque. Si $p = 0 \Leftrightarrow A$ est définie négative, $t \mapsto (1-t)A + tE_0$ est un chemin joignant A et E_0. Supposons donc que $\operatorname{sgn} A = p > 0$. Alors, il existe un vecteur propre v_1 de A de valeur propre $\lambda_1 > 0$. Soit R la rotation dans le plan P engendré par $\{e_1, v_1\}$ tq $Re_1 = v_1$ (si $v_1 = e_1$ on peut prendre $R = id$). On prolonge R sur $\{e_1, v_1\}^\perp$ comme identité.

Évidemment, il existe un chemin de rotations $t \mapsto R_t$ tq R_0 est la matrice identité et $R_1 = R$. Donc A et $R^{-1}AR$ appartiennent à la même composante connexe. Puisque par construction on a $R^{-1}ARe_1 = \lambda_1 e_1$, en fait

$$R^{-1}AR = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array}\right)$$

où $A' \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ est symétrique et $\operatorname{sgn} A' = p - 1$. Par l'hypothèse de récurrence, il existe un chemin $t \mapsto A'_t$ tq $A'_0 = A'$ et $A'_1 = E'_{p-1}$, où E'_{p-1} est la $(n-1) \times (n-1)$-matrice de la signature $p - 1$. Donc

$$t \mapsto \left(\begin{array}{c|c} (1-t)\lambda_1 + t & 0 \\ \hline 0 & A'_t \end{array}\right)$$

est un chemin joignant $R^{-1}AR$ et E_p. Ainsi, X_p est connexe.