Questions organisationnelles

Note finale = 80% pour l'examen écrit + 20% pour des devoirs ;

Les devoirs : 6 (2+2+2) exercices toutes les trois semaines ;
Chaque troisième semaine : on choisira 1 de ces 6 exercices au hasard et vous devrez écrire une solution en présence.

MATH–F211 $\longrightarrow$ Differential geometry I

$$\longrightarrow \text{Differential geometry II} \longrightarrow \begin{cases} \text{Géométrie riemannienne} \\ \text{Riemann surfaces} \\ \text{Géométrie symplectique} \\ \text{Global analysis} \\ \text{Algebraic topology} \end{cases}$$

Motivation : La continuité

$f = f(x)$ est continue si un petit changement de x entraîne un petit changement de $f(x)$. Ainsi,

$$y \approx x \qquad \Longrightarrow \qquad f(y) \approx f(x).$$

Par exemple, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ est continue mais $f(x) = \operatorname{sign} x$ est discontinue.

L'objectif du cours est de trouver un langage efficace pour discuter la notion de la continuité.

La continuité en physique

En physique, presque (?) toutes les quantités ne sont connues qu'approximativement.

Une question fondamentale : Supposons qu'une application f décrive un modèle physique. Si y est une valeur approximative de x, est-ce que $f(y)$ est une valeur approximative de $f(x)$? Autrement dit, est-ce que f est continue ?

Exemple

- La force d'attraction entre deux planètes dépend continûment de leurs masses : $F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$;
- La période de petites oscillations du pendule $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ est une fonction continue de l.

La continuité en mathématique

Pour les applications $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, le slogan

$$y \approx x \qquad \Longrightarrow \qquad f(y) \approx f(x)$$

peut être précisé comme suit :

Définition

Une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est dite *continue* si $\forall x \in \mathbb{R}^n\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$ tq

$$\|y - x\| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|f(y) - f(x)\| < \varepsilon$$

ou $\|h\| = \left(\sum_{i=1}^n h_i^2\right)^{1/2}$, $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$.

Q : Pourquoi les fonctions continues sont-elles importantes ?

Parce qu'elles ont des propriétés importantes, e.g. :

- Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, f est bornée et $\exists x_0 \in [a,b]$ et $\exists x_1 \in [a,b]$ tq $\forall x \in [a,b]$
$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1).$$
- (Théorème des valeurs intermédiaires) Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, l'équation
$$f(x) = y, \qquad y \in \mathbb{R}$$
a une solution ssi $f(x_0) \leq y \leq f(x_1)$.

Défi : le cas $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ne suffit pas pour les applications.

Exemple (Le pendule : approche non rigoureuse)

Les oscillations d'un pendule sont décrites par l'équation $\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin\theta$, ou $\omega^2 = \frac{g}{l}$. Si θ est petit, $\sin\theta \approx \theta$, alors l'équation approximative devient
$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$$
qui peut être résolue de manière explicite :
$$\theta(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t. \qquad (*)$$
On peut déterminer les constantes a et b à partir des conditions initiales, e.g. : $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0 \implies a = \theta_0$ et $b = 0$, ainsi $\theta(t) = \theta_0 \cos\omega t$.

NB. $\theta\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \theta(t) \implies T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Alors, (*) décrit les oscillations d'un pendule approximativement.

Mais pourquoi ? Que veut-on dire par « deux fonctions sont proches » ?

En résumé, on a besoin d'une notion de continuité pour les applications définies sur des ensembles plus généraux que $\mathbb{R}^n$.

Pour trouver une forme plus générale, retournons au cas $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
Désignons $B_r(x) := \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < r \right\}$ où $r > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Définition

On dit que $U \subset \mathbb{R}^n$ est *ouvert* si $\forall x \in U \quad \exists r > 0 \quad \text{tq} \quad B_r(x) \subset U$.

Exemple

$B_r(x)$ est ouvert $\forall x \in \mathbb{R}^n$ et $\forall r > 0$.

$\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ désigne la collection de tous les ouverts de $\mathbb{R}^n$, alors

$$U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n} \iff \mathbb{R}^n \supset U \text{ est ouvert.}$$

Proposition

(T1) *$\mathbb{R}^n, \varnothing \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$.*

(T2) *Si $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$, alors $U_1 \cap \cdots \cap U_k \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$.*

(T3) *Si $\{U_i : i \in I\}$ est une collection quelconque d'éléments de $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$, alors $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$.*

Démonstration.

(T1) Évident.

(T2) Soit $x \in U_1 \cap \cdots \cap U_k$, alors $x \in U_j \quad \forall j \in \{1, \ldots, k\}$.
U_j est ouvert $\implies \exists r_j > 0$ tq $B_{r_j}(x) \subset U_j$.
Posons $r := \min\{r_1, \ldots, r_k\} > 0$. Donc $B_r(x) \subset U_j \; \forall j \implies$
$B_r(x) \subset U_1 \cap \cdots \cap U_k$.

(T3) Soit $x \in \bigcup_{i \in I} U_i \implies \exists i \in I$ tq $x \in U_i$;
U_i est ouvert $\implies \exists r > 0$ tq $B_r(x) \subset U_i \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.

$\square$

Définition

Pour un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^m$ quelconque et pour une application $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ quelconque, l'image inverse est définie par

$$f^{-1}(A) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid f(y) \in A\}.$$

Proposition

$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est continue $\iff$ $\forall U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n} \qquad f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$.

Démonstration.

($\Longleftarrow$) : Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$; $z := f(x)$.

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(z) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^m} \quad &\Longrightarrow \quad f^{-1}\big(B_\varepsilon(z)\big) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n} \\ &\Longrightarrow \quad \exists \delta > 0 \text{ tq } B_\delta(x) \subset f^{-1}\big(B_\varepsilon(z)\big) \\ &\Longrightarrow \quad \text{Si } y \in B_\delta(x), \text{ alors } f(y) \in B_\varepsilon(z) \\ &\Longrightarrow \quad \text{Si } \|y - x\| < \delta, \text{ alors } \|f(y) - f(x)\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, f est continue. □

Proposition

$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est continue $\iff$ $\forall U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n} \qquad f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$.

Démonstration.

($\Longrightarrow$) : Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} f \text{ est continue} \quad &\Longrightarrow \quad \|f(y) - f(x)\| < \varepsilon \text{ lorsque } \|y - x\| < \delta \\ &\Longrightarrow \quad f(y) \in B_\varepsilon\big(f(x)\big) \text{ lorsque } y \in B_\delta(x) \\ &\Longrightarrow \quad y \in f^{-1}\big(B_\varepsilon(x)\big) \text{ lorsque } y \in B_\delta(x) \\ &\Longrightarrow \quad B_\delta(x) \subset f^{-1}\big(B_\varepsilon(x)\big). \end{aligned}$$

Alors, $x \in f^{-1}(U) \iff f(x) \in U$; $U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^m} \Longrightarrow \exists \varepsilon > 0$ tq $B_\varepsilon\big(f(x)\big) \subset U$ $\Longrightarrow B_\delta(x) \subset f^{-1}(U)$ et donc $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$. □

En résume, on peut définir la continuité uniquement en termes d'ensembles ouverts.

Topologie

Soit X un ensemble non-vide quelconque.

Définition

Une collection $\mathcal{T}_X$ de sous-ensembles de X est *une topologie sur X* si

(T1) $X, \varnothing \in \mathcal{T}_X$.

(T2) Si $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{T}_X$, alors $U_1 \cap \cdots \cap U_k \in \mathcal{T}_X$.

(T3) Si $\{U_i : i \in I\}$ est une collection quelconque d'éléments de $\mathcal{T}_X$, alors $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_X$.

Le couple $(X, \mathcal{T}_X)$ est *un espace topologique*. Les éléments $U \in \mathcal{T}_X$ s'appelent *les ouverts* de la topologie.

Exemple

0) X quelconque, $\mathcal{T}_X := \{\varnothing, X\}$; La topologie *grossière*.
1) X quelconque, $\mathcal{T}_X := \{U \subset X\}$ (tous sous-ensembles) ; La topologie *discrète*.
2) $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$; La topologie standard de $\mathbb{R}^n$.

Remarque

- Pour démontrer (T2), il suffit de montrer que
$$U_1, U_2 \in \mathcal{T}_X \quad \Longrightarrow \quad U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_X.$$
- Pour un ensemble X quelconque et sous-ensembles U_i, $i \in I$, on a
$$X \smallsetminus \bigcap_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} \big(X \smallsetminus U_i\big) \qquad \text{et} \qquad X \smallsetminus \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} \big(X \smallsetminus U_i\big).$$

Proposition

Pour X quelconque, $\mathcal{T}_X := \{U \subset X \mid X \smallsetminus U \text{ est fini ou } U = \varnothing\}$ est une topologie sur X. Elle s'appelle la topologie cofinie.

Démonstration.

(T2) $X \smallsetminus \big(U_1 \cap U_2\big) = \big(X \smallsetminus U_1\big) \cup (X \smallsetminus U_2)$ est fini $\Longrightarrow$ $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_X$.

(T3) $X \smallsetminus \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} X \smallsetminus U_i$ est fini $\Longrightarrow$ $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_X$.

$\square$

L'ESPACE TOPOLOGIQUE N'EST PAS SEULEMENT UN ENSEMBLE !

Ainsi, chaque ensemble X admet au moins 3 topologies différentes (si X est infini) : grossière, cofinie et discrète.

- grossière ≠ cofinie : $X \setminus \{x_0\} \in \mathcal{T}_X^{cofin}$ et $X \setminus \{x_0\} \notin \mathcal{T}_X^{gros}$.
- grossière ≠ discrète : $\{x_0\} \in \mathcal{T}_X^{discr}$ et $\{x_0\} \notin \mathcal{T}_X^{gros}$.
- cofinie ≠ discrète : $\{x_0\} \in \mathcal{T}_X^{discr}$ et $\{x_0\} \notin \mathcal{T}_X^{cofin}$.

Attention

On dit souvent que X est un espace topologique si la topologie est connue. Dans ce cas, il faut bien comprendre de quelle topologie il s'agit !

APPLICATIONS CONTINUES

Définition

Soit $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ une application entre deux espaces topologiques. Elle est dite *continue* ou $(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y)$-*continue* si pour tout $U \in \mathcal{T}_Y$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$.

Attention

La notion de continuité dépend des topologies choisies.

Exemple

0) $id\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (X, \mathcal{T}_X)$ est toujours continue.
1) $f\colon (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}) \to (\mathbb{R}^m, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^m})$ est continue ssi f est continue dans le sens de l'analyse (ici, $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ est la topologie standard de $\mathbb{R}^n$!).
2) $f\colon (X, \mathcal{T}_X^{gros}) \to (\mathbb{R}^m, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^m})$ est continue ssi f est constante : si $z \in \operatorname{im} f$, $f^{-1}(B_\varepsilon(z)) \neq \varnothing$, alors $f^{-1}(B_\varepsilon(z)) = X \Leftrightarrow f(X) \subset B_\varepsilon(z)$. Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, alors $f(X) \subset \{z\}$.
   Ainsi, $f\colon (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}^{gros}) \to (\mathbb{R}^m, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^m})$ est continue $\Longrightarrow$ f est constant !

Exemple (suite)

3) Chaque application $f\colon (X, \mathcal{T}_X^{discr}) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ est continue parce que chaque sous-ensemble de X est ouvert (dans $\mathcal{T}_X^{discr}$!).
4) Une fonction constante est toujours continue. Par contre, la fonction
$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$
n'est pas continue parce que $\chi^{-1}\big((\frac{1}{2}, 2)\big) = [0, +\infty)$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$ (la topologie standard).
5) Si X contient au moins 2 points, id: $(X, \mathcal{T}^{gros}) \to (X, \mathcal{T}^{discr})$ n'est pas continue parce que $id^{-1}\big(\{x_0\}\big) = \{x_0\}$ mais $\{x_0\}$ n'est pas ouvert dans $(X, \mathcal{T}^{gros})$.
Par contre, id: $(X, \mathcal{T}^{discr}) \to (X, \mathcal{T}^{gros})$ est continue !

Lemme

Soient $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y), (Z, \mathcal{T}_Z)$ des espaces topologiques et $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ des applications continues. Alors la composition $g \circ f\colon X \to Z$ est aussi continue.

Démonstration.

La démonstration découle du fait suivant : pour toutes les applications $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ et pour tout sous-ensemble $U \subset Z$ on a
$$\big(g \circ f\big)^{-1}(U) = f^{-1}\big(g^{-1}(U)\big).$$
Ainsi, si f, g sont continues et U est ouvert, $g^{-1}(U)$ est ouvert et donc $f^{-1}\big(g^{-1}(U)\big)$ est ouvert aussi. $\square$

Corollaire

$f = (f_1, f_2): X \to \mathbb{R}^2$ est continue ssi $f_1, f_2: X \to \mathbb{R}$ sont continues.

Démonstration.

Supposons que $f: X \to \mathbb{R}^2$ est continue. Puisque $\pi_1, \pi_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$\pi_1(x, y) = x \quad \text{et} \quad \pi_2(x, y) = y$$

sont continues, $\pi_1 \circ f = f_1$ et $\pi_2 \circ f = f_2$ sont continues par le lemme.

Supposons que f_1 et f_2 sont continues. Soit $U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$ et $p = (p_1, p_2) \in U$.
$U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2} \implies \exists r > 0$ tq $B_{2r}(p) \subset U \implies$
$R_p := (p_1 - r, p_1 + r) \times (p_2 - r, p_2 + r) \subset B_{2r}(p)$. Alors,
$f^{-1}(R_p) = f_1^{-1}\big((p_1 - r, p_1 + r)\big) \cap f_2^{-1}\big((p_2 - r, p_2 + r)\big)$ est ouvert comme l'intersection des ouverts et $f^{-1}(R_p) \subset f^{-1}(U)$. Ainsi,

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{p \in U} f^{-1}(R_p)$$

est ouvert comme la réunion des ouverts. □

L'espace des fonctions continues

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Désignons

$$C^0(X) := \big\{f: X \to \mathbb{R} \mid f \text{ est continue}\big\}.$$

Lemme

Soient $f, g \in C^0(X)$. Alors les fonctions suivantes sont toutes continues :

1. *$f + g$, définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;*
2. *$f - g$, définie par $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$;*
3. *fg, définie par $(fg)(x) = f(x)g(x)$;*
4. *f/g, définie par $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ si $g(x) \neq 0$ en tout $x \in X$;*
5. *$|f|$, définie par $|f|(x) = |f(x)|$.*

Comme exemple, nous démontrons que $fg \in \mathcal{C}^0(X)$ si $f, g \in \mathcal{C}^0(X)$.

En effet, fg est la composition suivante

$$X \xrightarrow{(f,g)} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mu} \mathbb{R},$$

où μ est définie par $\mu(s,t) = st$. Puisque (f,g) et μ sont continues, fg est continue aussi.

Exercice

Démontrer les affirmations restantes du lemme.

Sous-ensembles fermés

Soit $(X, \mathcal{T}_X)$ un espace topologique.

Définition

Un sous-ensemble $F \subset X$ est dit *fermé* si $X \setminus F$ est ouvert.

Exemple

1) $[0,1] \subset \mathbb{R}$ est fermé.
2) $\{0\} \subset \mathbb{R}^n$ est fermé.
3) $\{x_0\} \subset X$ muni de la topologie grossière n'est pas fermé lorsque X contient au moins 2 points.
4) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ est fermé si $\mathbb{R}$ est muni de la topologie standard. Par contre, $\mathbb{Z}$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ si $\mathbb{R}$ est muni de la topologie cofinie.

Ainsi, être fermé est une propriété de $F \subset X$ et de $\mathcal{T}_X$ et pas seulement de F : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ est toujours fermé, et cependent $\mathbb{Z} \subset (\mathbb{R}, \mathcal{T}^{cofin})$ n'est pas fermé.

Lemme

Soit X un espace topologique.

(F1) *$X, \varnothing$ sont fermés.*

(F2) *Si $F_1, \dots, F_k$ sont fermés, alors $F_1 \cup \dots \cup F_k$ est fermé.*

(F3) *Si $\{F_i : i \in I\}$ est une collection quelconque de sous-ensembles fermés, alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est fermé.* □

La démonstration découle des égalités suivantes :

$$A \setminus \Big(\bigcap_{i \in I} B_i\Big) = \bigcup_{i \in I} (A \setminus B_i) \qquad \text{et} \qquad A \setminus \Big(\bigcup_{i \in I} B_i\Big) = \bigcap_{i \in I} (A \setminus B_i).$$

Attention

Un sous-ensemble peut être à la fois ouvert et fermé (par ex $X \subset X$) ou ni ouvert ni fermé (par ex $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$).

Remarque

La collection de tous les sous-ensembles fermés contient la même quantité d'informations que la topologie. On aurait donc pu baser notre définition de topologie sur les ensembles fermés, définir un ouvert comme le complément d'un fermé, etc. Il s'agit simplement d'une convention.

Proposition

Une application $f : X \to Y$ est continue ssi pour tout fermé $F \subset Y$ l'image inverse $f^{-1}(F)$ est un fermé de X.

La preuve découle du fait suivant : pour tout sous-ensemble $A \subset Y$ on a

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A). \tag{*}$$

Exercice

Démontrer (*).

Un voisinage

Définition (Voisinage)

Soit X un espace topologique et $x \in X$. Tout sous-ensemble ouvert $V \subset X$ tq $V \ni x$ s'appelle *un voisinage* de x.

Attention

Parfois on dit que V est un voisinage ouvert.
Une autre convention possible (dominante dans la littérature française) :
Un voisinage de x dans X est un sous-ensemble W de X qui contient un ouvert qui contient x.

Pointes limites

Définition

Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique X. Un point $x \in X$ est un *point limite*, ou *point d'adhérence* de A si pour tout voisinage $U \subset X$ de x, on a

$$(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing.$$

Exemple

1) Les points limites de $A = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ sont $[-1, 1]$.
   Plus généralement, les points limites de $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ sont $\bar{B}_r(x) := \left\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| \leq r\right\}$.
2) L'ensemble $A = \{0\} \subset \mathbb{R}$ n'a pas de point limite.
3) Le point limite de $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ est $\{0\}$.
4) Les points limites de $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ sont $\mathbb{R}$.
5) Les points limites de $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ muni de la top. cofinie sont $\mathbb{R}$. Cependant, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ muni de la topologie standard n'a pas de point limite.

Définition

Soit $A \subset X$ un sous-ensemble d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. L'adhérence de A dans X est definie par

$$\bar{A} = \mathrm{adh}\,(A) := A \cup \left\{\text{points limites de } A\right\}.$$

Autrement dit, $x \in \bar{A}$ ssi pour chaque voisinage U de x, on a que

$$U \cap A \neq \varnothing.$$

Exemple

1) Pour $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$, $\overline{B_r(x)} = \bar{B}_r(x)$.

...

5) Pour $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ muni de la topologie cofinie, $\bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$. Cependant, pour $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ muni de la topologie standard, $\bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$.

Lemme

Soient $A, B \subset X$ deux sous-ensembles d'un espace topologique X. Alors

1. *A est fermé dans X ssi $\bar{A} = A$.*
2. *Si $A \subset B$ alors $\bar{A} \subset \bar{B}$.*
3. *$\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.*

Démonstration.

1. Supposons que A est fermé. $\forall x \in X \setminus A =: V$, V est un voisinage tq $\left(V \setminus \{x\}\right) \cap A = \varnothing$, alors $x \notin \bar{A}$ et donc $A = \bar{A}$.
   Supposons que $A = \bar{A}$. $\forall x \in X \setminus \bar{A} = X \setminus A \quad \exists$ un voisinage U_x tq $x \in U_x$ et $\left(U_x \setminus \{x\}\right) \cap A = \varnothing \implies U_x \subset X \setminus A$. Alors, $X \setminus A$ est un ouvert comme la réunion des ouverts : $X \setminus A = \bigcup_{x \in X \setminus A} U_x$.
2. Evident.
3. Il suffit de démontrer que $\bar{\bar{A}} \subset \bar{A}$. Soit x un point limite de $\bar{A}$. Alors, $\forall$ voisinage V de x on a : $\exists y \in V \cap \bar{A}$ et $y \neq x$. Donc, V est un voisinage de y, qui est un point limite de A. Donc, $\left(V \setminus \{y\}\right) \cap A \neq \varnothing \implies x$ est un point limite de A.

$\square$

Proposition

$\bar{A}$ est fermé pour tout $A \subset X$. En fait, $\bar{A}$ est le plus petit fermé qui contient A :

$$\bar{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ est fermé} \\ A \subset F}} F. \tag{*}$$

Démonstration.

Lemme $\implies$ $\bar{A}$ est fermé.

Désignons temporairement par B le membre de droite de (*) et notons que B est fermé.

Si F est fermé et $A \subset F$, $\bar{A} \subset \bar{F} = F$ et alors $\bar{A} \subset B$.

Pour démontrer l'inclusion $B \subset \bar{A}$, on note que $\bar{A}$ est un fermé qui contient A.

□

Espaces métriques

Les espaces métriques constituent une classe d'espaces topologiques.

Définition

Soit M un ensemble non-vide. Une fonction $d \colon M \times M \to \mathbb{R}$ est une *métrique* si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- M1 $d(x, y) \geq 0$ pour tout $x, y \in M$ et $d(x, y) = 0$ ssi $x = y$
- M2 $d(x, y) = d(y, x)$ pour tout $x, y \in M$.
- M3 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ pour tout $x, y, z \in M$ (*l'inégalité triangulaire*).

Le couple (M, d) est un *espace métrique*.

Proposition (La métrique euclidienne)

$$d \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

est bien une métrique sur $\mathbb{R}^n$. En particulier, $d(x, y) = |x - y|$ est une métrique sur $\mathbb{R}$.

Lemma (L'inégalité de Cauchy)

Soient $r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}$. Alors

$$\Big(\sum r_j s_j\Big)^2 \le \Big(\sum r_j^2\Big)\Big(\sum s_j^2\Big). \tag{$*$}$$

Démonstration du lemme.

Dans le cas où $a := \sum r_j^2 = 0$, $(*)$ est évidente. Supposons $a > 0$ et considérons

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum (t r_j + s_j)^2 = t^2 \sum r_j^2 + 2t \sum r_j s_j + \sum s_j^2 \\ &= at^2 + 2bt + c = a\big(t + b/a\big)^2 + c - b^2/a. \end{aligned}$$

Évidemment, $F(t) \ge 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier,

$$F(-b/a) \ge 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b^2 \le ac \quad \Longleftrightarrow \quad (*).$$

$\square$

Proposition (La métrique euclidienne)

$$d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

est bien une métrique sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration.

M1 et M2 sont évidentes. Pour démontrer M3, notons $r_j := x_j - z_j$ et $s_j := z_j - y_j$. Il faut démontrer que

$$\sqrt{\sum (r_j + s_j)^2} \le \sqrt{\sum r_j^2} + \sqrt{\sum s_j^2} \quad \Longleftrightarrow$$

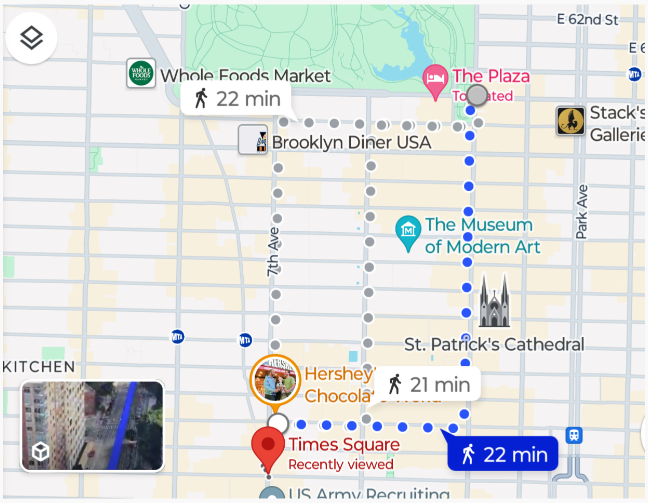
$$\cancel{\sum r_j^2} + 2\sum r_j s_j + \cancel{\sum s_j^2} \le \cancel{\sum r_j^2} + 2\sqrt{\sum r_j^2}\sqrt{\sum s_j^2} + \cancel{\sum s_j^2} \quad \Longleftrightarrow$$

l'inégalité de Cauchy.

$\square$

Exemple (Des espaces métriques)

1. Pour chaque X, la fonction
$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$
est une métrique (la métrique d'un égoïste ; la métrique discrète).
2. $d_{\mathcal{M}}(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ est une métrique sur $\mathbb{R}^2$ (la métrique de Manhattan).



Exemple (Des espaces métriques II)

3. $d_\infty(x,y) = \max\left\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\right\}$ est aussi une métrique sur $\mathbb{R}^2$.
4. Soit $\mathcal{C}^0[a,b]$ l'ensemble des fonctions continues $[a,b] \to \mathbb{R}$. Pour $f, g \in \mathcal{C}^0[a,b]$, on définit
$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx,$$
$$d_2(f,g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2\, dx\right)^{1/2},$$
$$d_\infty(f,g) = \sup\left\{|f(x) - g(x)| : x \in [a,b]\right\}.$$
d_1, d_2 et d_∞ sont des métriques sur $\mathcal{C}^0[a,b]$.

À titre d'exemple, on va démontrer : d_1 est une métrique sur $\mathcal{C}^0[a,b]$.

Démonstration.

M1 et M2 sont évidentes. Pour vérifier M3, on doit démontrer que

$$d_1(f,g) \le d_1(f,h) + d_1(h,g) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \overset{?}{\le} \int_a^b |f(x) - h(x)|\, dx + \int_a^b |h(x) - g(x)\, dx.$$

La dernière inégalité découle de

$$|f(x) - g(x)| = \big|\big(f(x) - h(x)\big) + \big(h(x) - g(x)\big)\big| \le |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$$

qui est simplement l'inégalité triangulaire de d_1 sur $\mathbb{R}$ (appliquée aux points $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$). □

Exercice

Démontrer que d_2 et d_∞ sont bien des métriques sur $\mathcal{C}^0[a,b]$ et $\mathcal{C}^1[a,b]$.

La distance de Levenshtein*

La distance de Levenshtein est une distance entre deux chaînes de caractères qui est égale au nombre minimal d'opérations nécessaires pour transformer une chaîne de caractères en une autre, à l'aide de remplacement, suppression et ajout d'un caractère.

Exemple

Prenons de mots : NICHE et CHIEN. En regardant le tableau

N	I	C	H		E	
		C	H	I	E	N

on déduit que $d_{Lev}(\text{NICHE}, \ \text{CHIEN}) \le 4$. En fait, on peut vérifier que $d_{Lev}(\text{NICHE}, \ \text{CHIEN}) = 4$.

Pour deux langues différentes, on compose une liste (100 mots, par exemple) de mots de même sens et on définit la distance lexicale entre ces deux langues par

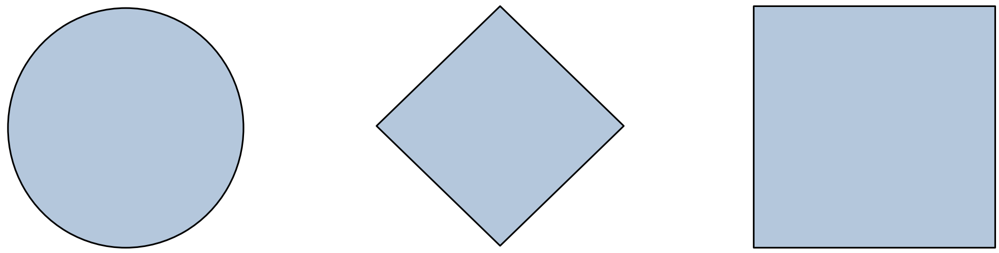
$$d_{DL}(\text{L1}, \text{L2}) := \sum_j d_{Lev}\big(\text{MOT}_j, \text{MOT}'_j\big)$$

Soit (M, d) un espace métrique quelconque. Comme dans le cas de $\mathbb{R}^n$, on définit

Définition

La boule ouverte centrée en $m \in M$ de rayon $r > 0$ est l'ensemble

$$B_r(m) = \left\{m' \in M : d(m, m') < r\right\}.$$



Les boules ouvertes dans $\mathbb{R}^2$ pour les métriques suivantes : euclidienne, de Manhattan et d_∞. Parfois, les boules ne sont pas si « rondes ».

Définition

Un sous-ensemble $U \subset M$ est dite ouvert si

$$\forall m \in U \quad \exists r > 0 \quad \text{tq} \quad B_r(m) \subset U.$$

Exercice

1. Démontrer que $B_r(m)$ est un ouvert.
2. Démontrer que $\left\{m' \in M \mid d(m, m') > r\right\}$ et un ouvert.

Désignons $\mathcal{T}_M := \left\{U \subset M \mid U \text{ est ouvert}\right\} = \mathcal{T}_{(M,d)} = \mathcal{T}_d$.

Proposition

$\mathcal{T}_M$ est une topologie sur M. Ainsi, chaque espace métrique est un espace topologique.

Démonstration : voir la démonstration pour $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ (Exercise !).

Proposition

Soit d la métrique discrète sur M. Alors, $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}^{discr}$.

Démonstration.

Puisque chaque point $\{m\} = B_1(m)$ est un ouvert dans (M, d), chaque sous-ensemble $U \subset M$ est ouvert :

$$U = \bigcup_{m \in U} \{m\}.$$

Donc, $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}^{discr}$. □

Question

Est-ce que toute topologie vient d'une métrique ?

Non. Pour démontrer cela, soit X un ensemble infini muni de la topologie cofinie. Supposons que $\mathcal{T}^{cofin} = \mathcal{T}_d$ pour une métrique d. Choisissons un $x \in X$ et considérons

$$X = \bar{B}_{1/2}(x) \cup \big(X \setminus B_{1/2}(x)\big) = \text{ fermé } \cup \text{ fermé}$$

$\Longrightarrow$ X est fini parce que les fermés sont finis.

Métriques équivalentes

Parfois différentes métriques engendrent la même topologie.

Définition

Soient d, d' deux métriques sur l'ensemble M. Elles sont dites *Lipschitz équivalentes* (ou simplement équivalentes) s'il existe $A, B > 0$ tel que pour tout $x, y \in M$

$$A\, d(x, y) \leq d'(x, y) \leq B\, d(x, y).$$

Par exemple, les métriques euclidienne et de Manhattan sur $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes (Preuve ?).

Proposition

Si d et d' sont Lipschitz équivalentes, alors $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$.

La démonstration découle de l'observation suivante : Si d et d' sont Lipschitz équivalentes, alors $\forall m \in M$ et $\forall r > 0 \quad \exists r' > 0$ tq $B_r^d(m) \supset B_{r'}^{d'}(m)$

ET $\quad \forall m \in M$ et $\forall r' > 0\ \exists r > 0$ tq $B_{r'}^{d'}(m) \supset B_r^d(m)$.

Supposons que (M, d_M) et (N, d_N) sont deux espaces métriques. Sur $M \times N$ définissons

$$\begin{aligned} d_1\big((m_1,n_1),(m_2,n_2)\big) &= d_M(m_1,m_2) + d_N(n_1,n_2), \\ d_2\big((m_1,n_1),(m_2,n_2)\big) &= \sqrt{d_M(m_1,m_2)^2 + d_N(n_1,n_2)^2}, \\ d_\infty\big((m_1,n_1),(m_2,n_2)\big) &= \max\big\{d_M(m_1,m_2),\ d_N(n_1,n_2)\big\}. \end{aligned}$$

Exercice

Démontrer que d_1, d_2 et d_∞ sont des métriques sur $M \times N$.

Ainsi, le produit d'espaces métriques est un espace métrique mais la métrique n'est pas unique. Néanmoins, on a le fait suivant.

Proposition

d_1, d_2 et d_∞ sont Lipschitz équivalentes.

À vous de la démontrer.

Suites et limites

Rappelons qu'une suite (x_n) dans $\mathbb{R}^n$ converge vers $x \in \mathbb{R}^n$ lorsque $n \to \infty$ si $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N > 0$ tq pour tout $n \geq N$ on a $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

Définition

Une suite (x_n) dans un espace métrique (M, d) converge vers $x \in M$ lorsque $n \to \infty$ si $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N > 0$ tq pour tout $n \geq N$ on a $d(x_n, x) < \varepsilon$.

Exercice

Montrer que la limite dans un espace métrique est unique si elle existe :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = m \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = m' \qquad \Longrightarrow \qquad m = m'.$$

Attention

La convergence est une propriété de la suite **et de la métrique.**

Exemple

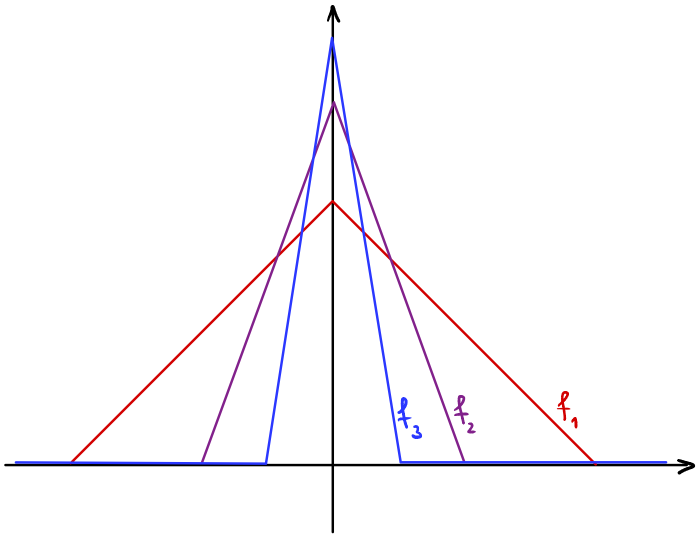
Dans un espace muni de la métrique discrète, une suite x_n converge ssi $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $x_N = x_{N+1} = x_{N+2} = \dots$ Donc, $x_n = \frac{1}{n}$ converge dans $(\mathbb{R}, d_E)$, mais pas dans $(\mathbb{R}, d^{discr})$.

Pour construire un exemple plus intéressant, nous observons : Si $f_n \in \mathcal{C}^0[a,b]$ converge vers f par rapport à d_∞, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$.

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ une fonction positive tq $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ lorsque $|x| \geq 1$. Par exemple, on peut choisir

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Posons $f_n(x) := n^{1/2} f(nx)$ et considérons f_n comme une suite dans $\mathcal{C}^0[-1,1]$.



- f_n ne converge pas par rapport à d_∞ parce que $f_n(0) = n^{1/2} \to \infty$.
- Soit $f(x) = 0$ $\forall x$, alors $f = 0$. On a

$$d_1(f_n, 0) = \int_{-1}^{1} \left|n^{1/2} f(nx)\right| dx \overset{t=nx}{=} n^{-1/2} \int_{-n}^{n} \left|f(t)\right| dt$$

$$= n^{-1/2} \int_{-1}^{1} \left|f(t)\right| dt = const \cdot n^{-1/2} \longrightarrow 0.$$

Donc, f_n converge par rapport à d_1 vers $f = 0$.

Exercice $(*)$

Clarifier si f_n converge par rapport à d_2.

Proposition

Soit M un espace métrique, $A \subset M$ et $m \in M$. Alors, $m \in \bar{A}$ ssi il existe une suite $a_n \in A$ tq $a_n \to m$.

Démonstration.

Si $m \in A$, on peut poser $a_n = m$. Ainsi, supposons que $m \in \bar{A} \setminus A \implies$ m est un point d'adhérence de $A \implies \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists a_n \in A \cap B_{1/n}(m)$ parce que $B_{1/n}(a)$ est un voisinage de m. Par construction, $d(a_n, m) < \frac{1}{n}$ et donc a_n converge vers m.

Supposons que $\lim a_n = m$. S'il existe n tq $a_n = m$, on a $m \in A$. Alors, on peut supposer $a_n \neq m$ pour tout n.
Soit V un voisinage de m quelconque. Alors, $\exists r > 0$ tq $B_r(m) \subset V$. Puisque $\lim a_n = m$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $d(a_n, m) < r$ pour tout $n \geq N$. Ainsi, $a_N \in B_r(m) \implies$ $a_N \in V$ et $a_N \neq m$. Donc, m est un point d'adhérence de A. □

Théorème (Critère des suites pour un fermé)

Soit M un espace métrique. Un sous-ensemble $A \subset M$ est fermé si et seulement si, pour toute suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers $m \in M$ on a que $m \in A$.

La démonstration découle de la proposition précédente.

Rappelons que $f\colon (M, d_M) \to (N, d_N)$ est dite continue, si
$U \in \mathcal{T}_N \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_M$.

Théorème

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *f est continue ;*
2. *$\forall m \in M$ et $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(m, \varepsilon) > 0$ tq*
$$d_M(m', m) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_N\big(f(m'), f(m)\big) < \varepsilon.$$
3. *$\forall m \in M$ et pour chaque suite (x_n) de points de M on a que*
$$\lim_{n\to\infty} x_n = m \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(m).$$

La démonstration se fait comme dans le cas des fonctions $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et reste à vous comme exercice.

Remarque

Comme dans le cas des fonctions $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on dit que $f\colon (M, d_M) \to (N, d_N)$ est continue en $m \in M$ si l'une des conditions équivalentes suivantes est respectée :

1. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tq
$$d_M(m', m) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_N\big(f(m'), f(m)\big) < \varepsilon.$$
2. Pour chaque suite (x_n) de points de M on a
$$\lim_{n\to\infty} x_n = m \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(m).$$

Ainsi, f est continue ssi f est continue en tout $m \in M$.

Exemple

1. $id\colon (M, d_M) \to (M, d_M)$ est toujours continue.
2. $id\colon \left(\mathcal{C}^0[a,b], d_\infty\right) \to \left(\mathcal{C}^0[a,b], d_1\right)$, est continue parce que
$$d_\infty(f,g) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx < \delta(b-a).$$
Par contre, $id\colon \left(\mathcal{C}^0[a,b], d_1\right) \to \left(\mathcal{C}^0[a,b], d_\infty\right)$, n'est pas continue :
$$d_1(f,g) < \delta \quad \not\Longrightarrow \quad d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$
3. Plus généralement, soient d et d' deux métriques sur M. Alors,
$$d(m,m') \leq A\, d'(m,m') \quad \forall m, m' \in M$$
$$\Longrightarrow \quad id\colon (M,d) \to (M,d') \text{ est continue.}$$
Ainsi, si d et d' sont Lipschitz équivalentes, $id\colon (M,d) \to (M,d')$ et $id\colon (M,d') \to (M,d)$ sont continues.

Exemple (suite)

4. Soit $c \in [a,b]$. La fonction
$$ev_c\colon \left(\mathcal{C}^0[a,b], d_\infty\right) \to \mathbb{R}, \qquad ev_c(f) = f(c),$$
est continue, parce que $d_\infty(f,g) = \sup_x |f(x) - g(x)| < \delta \quad \Longrightarrow$ $d_E\big(ev_c(f), ev_c(g)\big) = \big|f(c) - g(c)\big| < \delta$.
5. Pour tout $m_0 \in M$ la fonction $f(m) := d(m_0, m)$ est continue.

Pour voir le dernier exemple, on applique l'inégalité
$$\big|d(x,y) - d(x,z)\big| \leq d(y,z) \tag{*}$$
qui vaut pour tous les points x, y, z dans un espace métrique quelconque. L'inégalité (*) découle de l'inégalité triangulaire (montrer comme exercice !)

Remarques sur les suites dans les espaces topologiques

Définition

Une suite (x_n) dans un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ converge vers $x \in X$ lorsque $n \to \infty$ si pour chaque voisinage V de m il existe $N > 0$ tq pour tout $n \geq N$ on a que $x_n \in V$.

Contrairement au cas des espaces métriques, “la” limite n’est pas unique en général.

Exemple

1. Rappelons que $\mathcal{T}_X^{gross} = \{\varnothing, X\}$. Alors, dans $(X, \mathcal{T}_X^{gross})$ toute suite (x_n) converge et tout point $x \in X$ est sa limite parce que pour tout x il y a un seul voisinage : X.
2. Soit (x_n) une suite dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}^{cofin})$ tq $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$. Alors, tout $x \in \mathbb{R}$ est une limite de (x_n).

Proposition

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset X$. Si A est fermé, pour toute suite (a_n) de points de A qui admet une limite a, alors $a \in A$.

Exercice

Démontrer cette proposition.

Remarque $(*)$

En général, la propriété “pour toute suite (a_n) de points de A qui admet une limite a, alors $a \in A$” n’implique pas que A est fermé :
Comme pour $\mathcal{T}^{cofin}$, on définit

$$\mathcal{T}^{coden} := \left\{U \subset X \mid X \setminus U \text{ est vide, fini ou dénombrable}\right\}.$$

Dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}^{coden})$ considérons $A = (-\infty, 0]$. Si $(a_n) \subset A$ et $b > 0$, $\mathbb{R} \setminus \{(x_n)\}$ est un voisinage de $b \implies b$ n’est pas une limite de (x_n). Pourtant A n’est pas fermé (par rapport à $\mathcal{T}^{coden}$!).

La topologie induite

Soit (M, d) un espace métrique. Pour tout $A \subset M$ on obtient une métrique sur A par restriction : $d_A : A \times A \to \mathbb{R}, \quad d_A = d|_{A \times A}$.
d_A s'appelle la métrique induite (de celle de M sur A).

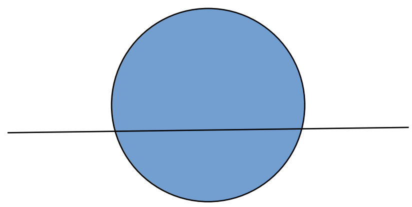
Exemple

Considérons $\mathbb{Z} \subset (\mathbb{R}, d_E)$. La métrique induite est $d_{\mathbb{Z}}(n, m) = |n - m|$. Remarquez que $\mathcal{T}_{d_{\mathbb{Z}}}$ est la topologie discrète (parce que $B_1(n) = \{n\}$) bien que $d_{\mathbb{Z}}$ et la métrique discrète ne soient pas Lipschitz équivalents.

Exercice

Montrer que $B_r^A(a) = \{a' \in A \mid d_A(a', a) < r\} = B_r^M(a) \cap A$.

Par
exemple, soit $M = \mathbb{R}^2$ muni de la métrique euclidienne et $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{[-10, 10] \times \{0\}\}$. $B_2^A((0,1))$ est non-connexe.



Proposition

Un sous-ensemble $U \subset A$ est ouvert par rapport à d_A ssi $\exists V \subset M$ qui est ouvert dans (M, d) tq $U = V \cap A$.

Démonstration.

Supposons que $U \subset A$ et un ouvert. Alors, $\forall u \in U \; \exists r = r(u) > 0$ tq $B_r^A(u) = \{u' \in U \mid d_A(u', u) < r\} \subset U$. Considérons

$$V := \bigcup_{u \in U} B_{r(u)}^M(u).$$

V est ouvert comme la réunion des ouverts et

$$V \cap A = \bigcup_{u \in U} \left(B_{r(u)}^M(u) \cap A\right) = \bigcup_{u \in U} B_{r(u)}^A(u) = U.$$

Inversement, supposons que $V \subset M$ est ouvert et $U = V \cap A$. Alors, $V \in \mathcal{T}_M$ $\implies \forall v \in V \quad \exists\, B_{r(v)}^M(v) \subset V$. En particulier, $\forall u \in U$
$B_{r(u)}^A(u) = B_{r(u)}^M(u) \cap A \subset V \cap A \implies V \cap A$ est ouvert dans (A, d_A). $\square$

Ainsi, on a démontré que

$$\mathcal{T}_{d_A} = \left\{ V \cap A \mid V \in \mathcal{T}_{(M,d)} \right\}. \tag{*}$$

Pour les espaces topologiques on *définit* la top. induite en utilisant (*) :

Définition

Soit A un sous-ensemble non-vide d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. Définissons une collection de sous-ensembles de A par

$$\mathcal{T}|_A = \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}.$$

$\mathcal{T}|_A$ est une topologie sur A appelée *la topologie induite*.

Remarque

Quand on pense à $A \subset X$ comme étant un espace topologique pour la topologie induite, on dit que A est un *sous-espace* de X.

On va démontrer plus tard que la top. induite est bien une topologie.

Exemple

1. $(0,1) \subset \mathbb{R}$: $U \subset (0,1)$ est ouvert ssi U est ouvert dans $\mathbb{R}$ parce que si V est ouvert dans $\mathbb{R}$ et $U = V \cap (0,1)$, U est ouvert dans $\mathbb{R}$.
2. $[0,1] \subset \mathbb{R}$:
   - $[0,\ 0,1)$ est ouvert parce que $[0,\ 0,1) = (-2,\ 0,1) \cap [0,\ 1]$.
   - $[0,\ 0,1]$ n'est pas ouvert.
   - $(0,5,\ 1]$ est ouvert.
   - En général, un ouvert de $[0,1]$ est de la forme suivante

     $$[0,\varepsilon) \cup V \cup (\delta, 1] \quad \text{ou} \quad [0,\varepsilon) \cup V \quad \text{ou} \quad V \cup (\delta, 1] \quad \text{ou} \quad V,$$

     où V est ouvert dans $(0,1)$.
3. $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$: la topologie induite est la topologie standard parce que $(a,b) = B_r(m) \cap \mathbb{R}$ si $m = \left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$ et $r = \frac{b-a}{2}$.

Attn : Un ensemble ouvert dans A n'est pas nécessairement ouvert dans X !

Lemma

La topologie induite $\mathcal{T}|_A$ est bien une topologie sur A.

Démonstration.

T1. $A = X \cap A$, $\varnothing = \varnothing \cap A$.

T2. Soient $V_1, \ldots, V_k \in \mathcal{T}|_A$. Alors il existe $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{T}$ t.q. $V_j = U_j \cap A$. Or

$$V_1 \cap \cdots \cap V_k = U_1 \cap A \cap \cdots \cap U_k \cap A = U_1 \cap \cdots \cap U_k \cap A.$$

Puisque $\mathcal{T}$ est une topologie, $U_1 \cap \cdots \cap U_k \in \mathcal{T}$. Donc $V_1 \cap \cdots \cap V_k \in \mathcal{T}|_A$.

T3. Soit $\{V_i : i \in I\}$ une collection quelconque d'éléments de $\mathcal{T}|_A$. Alors pour tout $i \in I$, il existe $U_i \in \mathcal{T}$ t.q. $U_i \cap A = V_i$. Or

$$\bigcup V_i = \bigcup (U_i \cap A) = \left(\bigcup U_i\right) \cap A.$$

Puisque $\mathcal{T}$ est une topologie, $\bigcup U_i \in \mathcal{T}$. Donc $\bigcup V_i \in \mathcal{T}|_A$. □

Proposition

1. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\varnothing \neq A \subset X$. Soit $\iota\colon A \to X$ l'inclusion. Alors ι est $(\mathcal{T}|_A, \mathcal{T})$-continue.*
2. *Soit $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ continue et $\varnothing \neq A \subset X$. Alors, $f|_A := f \circ \iota\colon A \to Y$ est $(\mathcal{T}_X|_A, \mathcal{T}_Y)$-continue.*
3. *Soient $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques et $\varnothing \neq B \subset Y$. Alors une application $f\colon X \to B$ est $(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y|_B)$-continue si et seulement si $\iota \circ f$ est $(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y)$-continue.*

Démonstration de 2.

Soit $U \in \mathcal{T}_Y$. Alors,

$$\left(f \circ \iota\right)^{-1}(U) = \iota^{-1}\left(f^{-1}(U)\right) = f^{-1}(U) \cap A$$

est ouvert comme l'intersection des ouverts. □

Exercice

Démontrer 1. et 3.

Définition

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. *Une base de la topologie* est un sous-ensemble $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, $\mathcal{B} = \{B_j \mid j \in J\}$ tq tout ensemble ouvert de X est la réunion d'ensembles appartenant à $\mathcal{B}$:

$$\forall U \in \mathcal{T} \quad \exists K \subset J \quad \text{tq} \quad U = \bigcup_{k \in K} B_k.$$

On observe :

- Tout $B \in \mathcal{B}$ est un ouvert de X;
- $\mathcal{B}$ est une base de la topologie ssi
  $\forall U \in \mathcal{T} \quad \text{et} \quad \forall x \in U \quad \exists B \in \mathcal{B} \quad \text{tq} \quad x \in B \subset U.$

Exemple

1. Pour un espace topologique quelconque $(X, \mathcal{T})$, $\mathcal{B} = \mathcal{T}$ est toujours une base de la topologie.

Exemple (suite)

2. Pour $(X, \mathcal{T}^{discr})$, $\mathcal{B} = \big\{\{x\} \mid x \in X\big\}$ est une base. Donc, une base de la topologie n'est pas unique en général (en fait, presque jamais).
3. Dans un espace métrique, $\mathcal{B} := \big\{B_r(m) \mid m \in M,\ r \in (0, \infty)\big\}$ est une base. $\mathcal{B}' := \big\{B_r(m) \mid m \in M,\ r \in \mathbb{Q},\ r > 0\big\}$ est une base aussi.
4. $\mathcal{B} := \big\{B_r(p) \mid p \in \mathbb{Q}^n,\ r \in \mathbb{Q},\ r > 0\big\}$ est une base de la topologie de $\mathbb{R}^n$. En particulier, $\mathbb{R}^n$ admet une base de la topologie dénombrable.

Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ est une base de la topologie, on a que

B1 $\forall x \in X \quad \exists B \in \mathcal{B} \quad \text{tq} \quad x \in B.$

B2 $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \quad \text{et} \quad \forall x \in B_1 \cap B_2 \quad \exists B \in \mathcal{B} \quad \text{tq} \quad x \in B \subset B_1 \cap B_2.$

En effet, B1 est évidente. $B_1, B_2 \in \mathcal{T} \implies B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T} \implies$ B2.

B1 $\forall x \in X \quad \exists B \in \mathcal{B} \quad \text{tq} \quad x \in B.$

B2 $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \quad \text{et} \quad \forall x \in B_1 \cap B_2 \quad \exists B \in \mathcal{B} \quad \text{tq} \quad x \in B \subset B_1 \cap B_2.$

Proposition

Soit $\mathcal{B}$ et une famille de sous-ensembles d'un ensemble $X \neq \varnothing$ quelconque. Si B1 et B2 sont satisfaites, il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ tq $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$.

Démonstration.

On définit $\mathcal{T} := \left\{U_K := \bigcup_{k\in K} B_k \mid K \subset J\right\} \cup \left\{\varnothing\right\}$. Alors, $\mathcal{T}$ est une topologie parce que

- B1 $\implies X \in \mathcal{T}$; De plus, T3 est évident.
- $V_K \cap V_L = \left(\bigcup_{k\in K} B_k\right) \bigcap \left(\bigcup_{\ell\in L} B_\ell\right) = \bigcup_{k\in K, \ell\in L} \left(B_k \cap B_\ell\right)$;

  $B_k \cap B_\ell \overset{B2}{=} \bigcup_{x\in B_k\cap B_\ell} B'_{k,l} \in \mathcal{T} \implies V_K \cap V_L \in \mathcal{T}.$

Par définition de $\mathcal{T}$, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$.

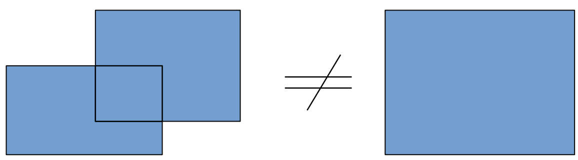
L'unicité : l'exercice. □

Topologie du produit

Soit $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ des espaces topologiques. On est tenté de définir la topologie sur $X \times Y$ par

$$\left\{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_X,\ V \in \mathcal{T}_Y\right\}. \tag{*}$$

Pourtant, (*)
n'est pas une topologie parce que
T3 n'est pas satisfaite en général.



Lemme

(*) a les propriétés B1 et B2.

La démonstration : exercice.

Corollaire

(*) est la base d'une topologie sur $X \times Y$. Cette topologie s'appelle la topologie produit.

Exercice

Si $\mathcal{B}_X$ et $\mathcal{B}_Y$ sont des bases des topologies de X et Y respectivement, alors $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y := \{B \times C \mid B \in \mathcal{B}_X,\ C \in \mathcal{B}_Y\}$ est une base de la topologie du produit.

Exemple

Considérons $\mathbb{R}^2$ comme le produit : $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$. Une base de la topologie du produit est constituée de rectangles $(a,b) \times (c,d)$. La topologie du produit coïncide avec la topologie standard (= celle induite par la métrique de Manhattan) parce que :

- Si U est ouvert par rapport à la topologie standard, on a $\forall u \in U\ \ \exists r > 0$ tq $B_r^{Manh}(u) \subset U$. Alors, U est ouvert par rapport à la topologie produit, parce que $B_r^{Manh}(u)$ est un rectangle.
- Si U est ouvert par rapport à la topologie du produit, $\forall u \in U$ $\exists (a,b) \times (c,d) \subset U \quad \text{tq} \quad u \in (a,b) \times (c,d) \implies \exists r > 0 \quad \text{tq}$ $B_r^{Manh}(u) \subset U$. Alors, U est ouvert par rapport à la topologie standard.

Attention

Un ouvert dans $X \times Y$ n'est pas nécessairement de la forme $U \times V$. Par exemple, la boule ouverte $B_1(0) = \{x_1^2 + x_2^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ n'est pas un rectangle !

Exercice

Généraliser l'exemple précédent pour montrer ce qui suit : Si (M, d_M) et (N, d_N) sont des espaces métriques, alors la topologie du produit sur $M \times N$ coïncide avec $\mathcal{T}_{d_1}$ où

$$d_1\big((m_1,n_1),(m_2,n_2)\big) = d_M(m_1,m_2) + d_N(n_1,n_2).$$

Exercice

Soient X et Y deux espaces topologiques. Choisissons un $y \in Y$ et identifions X avec $X \times \{y\} \subset X \times Y$. Montrer que la topologie induite sur $X \times \{y\}$ coïncide avec la topologie initiale de X.

Proposition

Les projections $p_1 : X \times Y \to X$ et $p_2 : X \times Y \to Y$ sont continues.

Démonstration.

$U \in \mathcal{T}_X \implies p_1^{-1}(U) = U \times Y \in \mathcal{T}_{X \times Y} \implies p_1$ est continue. □

Proposition

Soit $f : Z \to X \times Y$ une application où X, Y, Z sont des espaces topologiques. Alors f est continue ssi $\quad p_1 \circ f : Z \to X \quad$ et $\quad p_2 \circ f : Z \to Y$ sont continues.

Démonstration.

f est continue $\implies$ $p_1 \circ f$ et $p_2 \circ f$ sont continues en tant que composition des applications continues.

Démonstration (suite).

Supposons que $p_1 \circ f$ et $p_2 \circ f$ sont continues. Soit $W \subset X \times Y$ ouvert pour la topologie produit et $z \in f^{-1}(W)$ quelconque. On va montrer qu'il existe un ouvert $T_z \subset f^{-1}(W)$ tq $z \in T_z$. Il s'ensuivra que $f^{-1}(W)$ est ouvert, puisque

$$f^{-1}(W) = \bigcup_{z \in W} T_z$$

est une union d'ouverts.

Écrivons $f(z) = (x, y) \in W$. Alors il existe des ouverts $x \in U \subset X$ et $y \in V \subset Y$ tq $U \times V \subset W$. L'hypothèse implique que $T_1 = (p_1 \circ f)^{-1}(U)$ et $T_2 = (p_2 \circ f)^{-1}(V)$ sont des ouverts. De plus $z \in T_1 \cap T_2$.

Il reste à vérifier que $T_1 \cap T_2 \subset f^{-1}(W)$. Mais si $\hat{z} \in T_1 \cap T_2$ alors $p_1(f(\hat{z})) \in U$ et $p_2(f(\hat{z})) \in V$, donc $f(\hat{z}) \in U \times V \subset W$. □

Définition

Une application $f\colon X \to Y$ est *un homéomorphisme* si

1. f est bijective.
2. f est continue.
3. f^{-1} est continue.

S'il existe un homéomorphisme entre X et Y, on dit que ces espaces sont homéomorphes.

En topologie, les homéomorphismes jouent un rôle similaire aux

- isomorphismes entre deux groupes en algèbre ou
- isomorphismes entre deux espaces vectoriels en algèbre linéaire.

Attention

1. et 2. $\not\Longrightarrow$ 3. car $id\colon (X, \mathcal{T}^{discr}) \to (X, \mathcal{T}^{gros})$ est bijective et continue, mais $id^{-1} = id\colon (X, \mathcal{T}^{gros}) \to (X, \mathcal{T}^{discr})$ n'est pas continue (si X contient au moins 2 points).

Définition

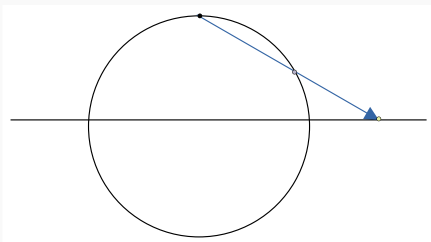
Une application $f\colon X \to Y$ est *un homéomorphisme* si

1. f est bijective.
2. f est continue.
3. f^{-1} est continue.

S'il existe un homéomorphisme entre X et Y, on dit que ces espaces sont homéomorphes.

Exemple

$S^1 \setminus \{pt\}$ et $\mathbb{R}$ sont homéomorphes. Exercice : trouver les formules pour $f\colon S^1 \setminus \{pt\} \to \mathbb{R}$ et $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to S^1 \setminus \{pt\}$ et prouver que ces deux applications sont continues.



Projection stéréographique

L'exemple précédent peut être généralisé pour les sphères de toutes dimensions : $S^n \setminus \{pt\}$ et $\mathbb{R}^n$ sont homéomorphes. Ici

$$S^n := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Explicitement,
en dimension 3 un homéomorphisme
$\varphi \colon S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$ est donné par

$$\varphi(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right), \qquad (x,y,z) \in S^2 \setminus \{N\},$$

où $N = (0,0,1)$. Cette application s'appelle *la projection stéréographique* (à partir du pôle nord).

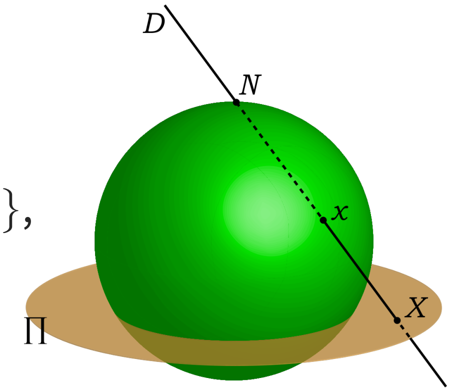


Image : Wikipedia.

Video : `https://youtu.be/VX-0Laeczgk`

Proposition

Un homéomorphisme est une application ouverte, càd que $f(U)$ est un ouvert si U est ouvert.

Démonstration.

Nous désignons $g = f^{-1} \colon Y \to X$. La preuve découle d'identité

$$g^{-1}(A) = \left\{ y \in Y \mid g(y) = a \in A \iff y = g^{-1}(a) = f(a) \right\} = f(A)$$

qui est valide pour tout $A \subset X$. Autrement dit,

$$\left(f^{-1}\right)^{-1}(A) = f(A).$$

Puisque f^{-1} est continue, $f(A)$ est ouvert si A est ouvert. $\square$

Remarque

Supposons que $f \colon X \to Y$ est bijective et continue. En fait, on a démontré que f est un homéomorphisme ssi f est une application ouverte (ou de manière équivalente ssi f est une application fermée)

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur X, càd que

- $x \sim x$;
- $x \sim y \implies y \sim x$;
- $x \sim y$ et $y \sim z \implies x \sim z$.

Désignons par $[x]$ la classe d'équivalence de x et par $X/\sim$ le quotient :

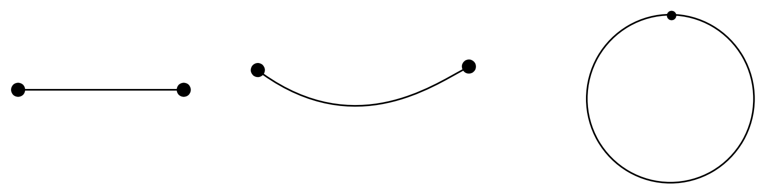
$$[x] = \{x' \in X \mid x' \sim x\} \qquad \text{et} \qquad X/\sim = \{[x] \in X \mid x \in X\}.$$

À titre d'exemple, définissons une relation d'équivalence sur $[0,1]$ par

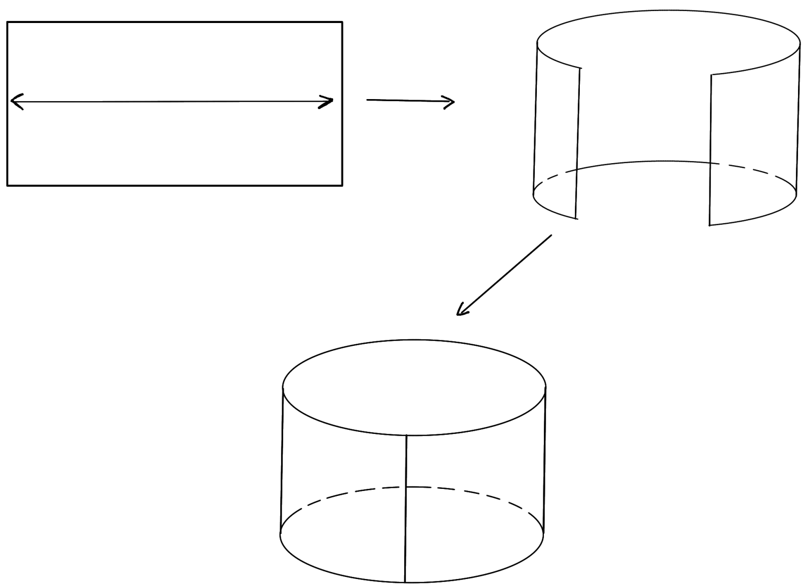
$$x \sim y \iff \begin{cases} x = y & \text{si } x, y \in (0,1), \\ x = y \text{ ou } x = 1 - y & \text{si } x, y \in \{0,1\}. \end{cases}$$

Effectivement, on doit identifier (« coller ») 0 et 1 (et seulement ces deux points).

En images,
cela se traduit comme suit :

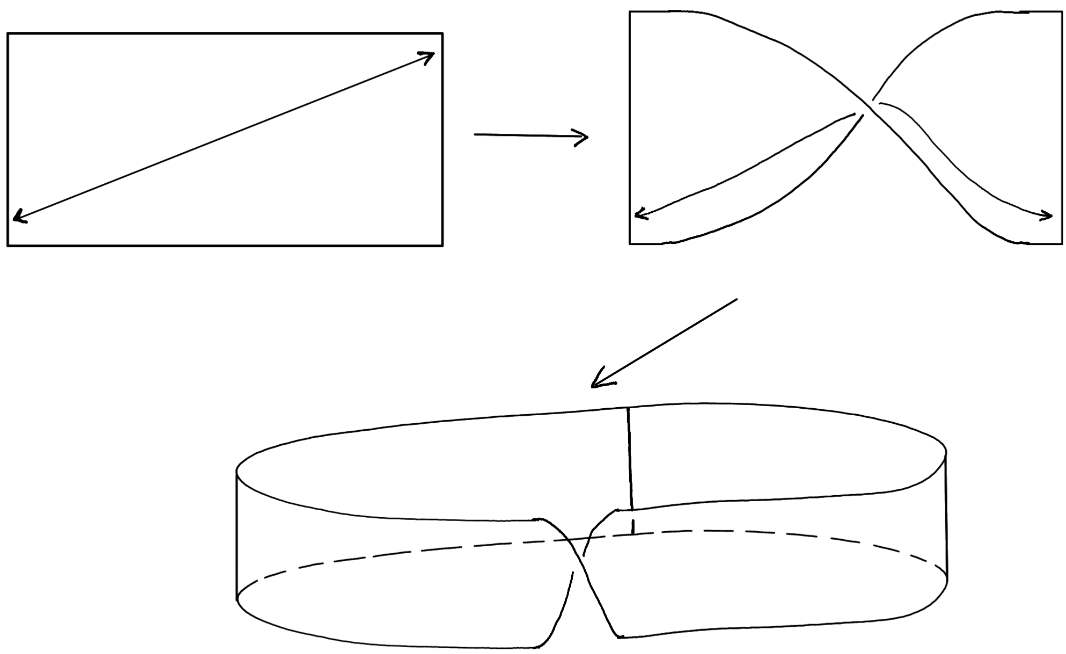


Un autre exemple :
$X = [0,1] \times [0,1]$, $(1,y) \sim (0,y)$ pour tout $y \in [0,1]$.

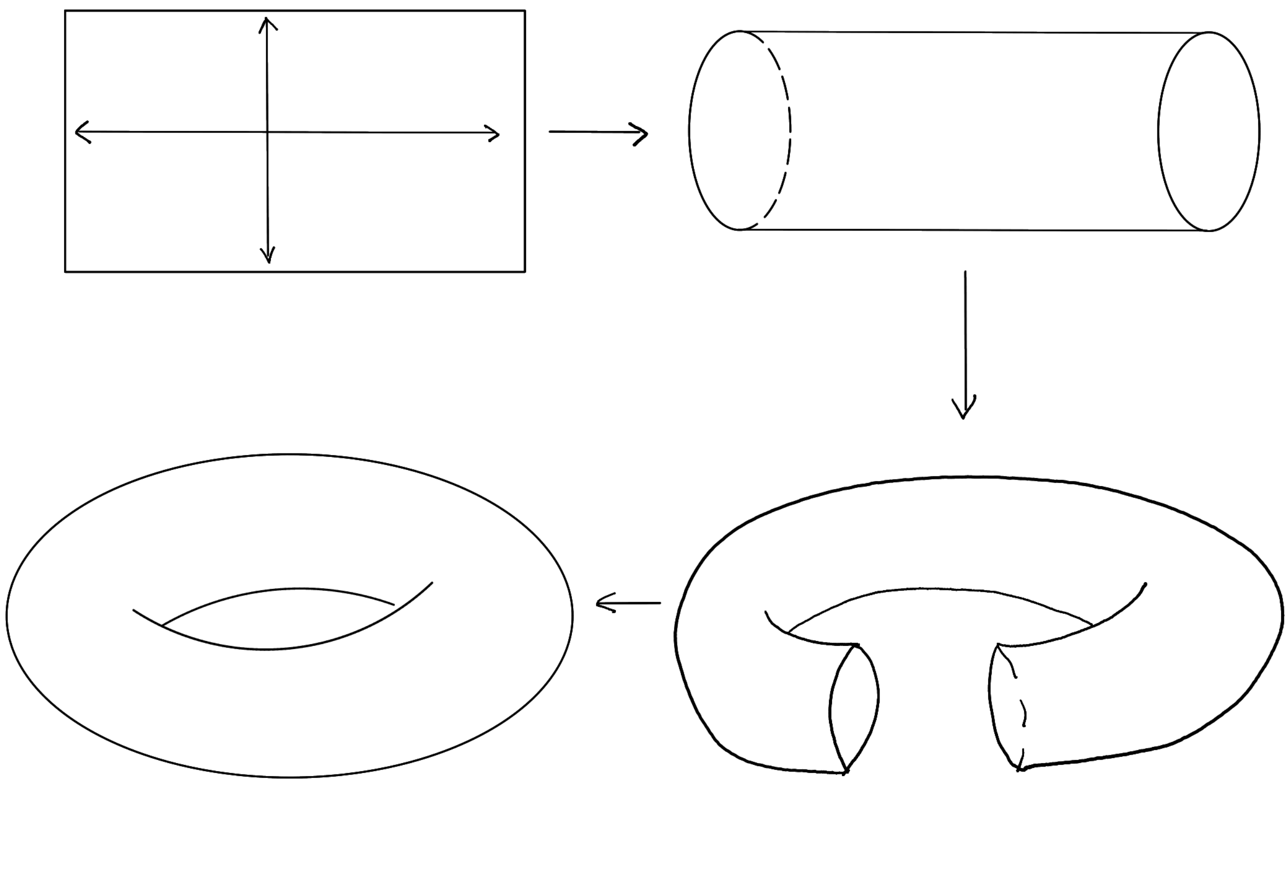


Ruban de Möbius

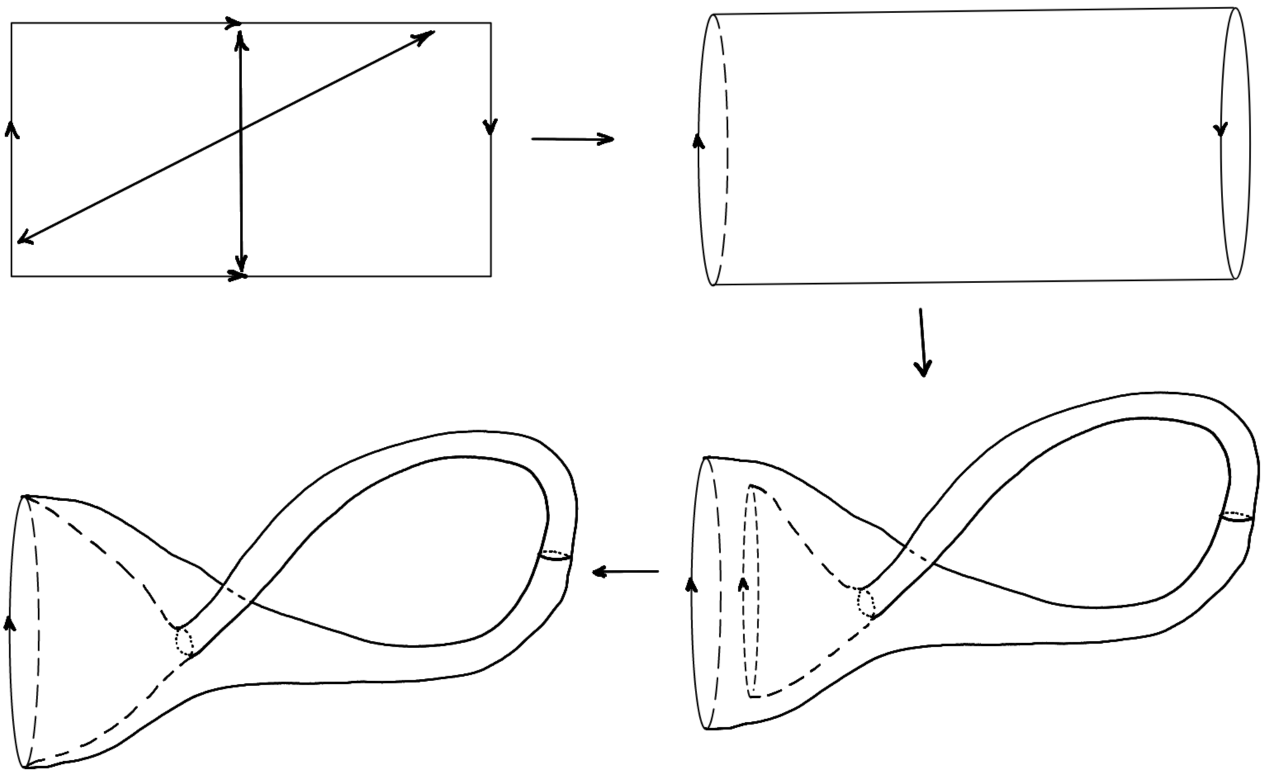
Encore un autre exemple : $X = [0,1] \times [0,1]$, $(1,y) \sim (0,1-y)$ pour tout $y \in [0,1]$.



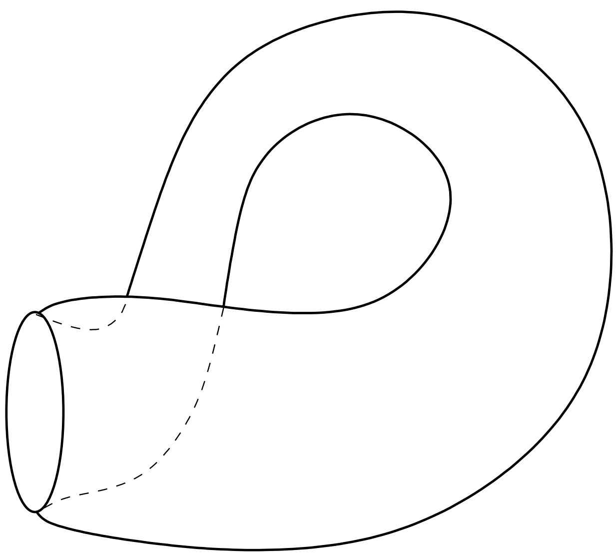
Le tore



La bouteille de Klein



La bouteille de Klein (suite)



On peut démontrer que La bouteille de Klein ne peut pas se plonger dans $\mathbb{R}^3$ (nous n’essaierons ni de prouver cette affirmation, ni même de la préciser au cours).

Nous avons construit le cercle, le ruban de Möbius, le tore et la bouteille de Klein comme des ensembles quotients. On peut munir ces ensembles (et les ensembles quotients en général) de la manière suivante.

Soit $\pi : X \to X/\sim$ la projection : $\pi(x) = [x] = \{x' \in X \mid x' \sim x\}$.

Définition

Soit X un espace topologique et $\sim$ une relation d'équivalence sur X quelconque. La famille $\mathcal{T}_{X/\sim}$ définie par

$$\mathcal{T}_{X/\sim} \ni U \quad \Longleftrightarrow \quad \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$$

s'appelle *la topologie quotient* sur $X/\sim$.

Lemme

La topologie quotient est bien une topologie.

Démonstration.

Désignons $Y := X/\sim$.
T1 : $\pi^{-1}(\varnothing) = \varnothing, \pi^{-1}(Y) = X$.

T2 : $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{T}_Y \Longleftrightarrow \pi^{-1}(U_j) \in \mathcal{T}_X$ pour tout $j = 1, \ldots, k$. Alors,

$$\pi^{-1}(U_1 \cap \cdots \cap U_k) = \pi^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap \pi^{-1}(U_k) \in \mathcal{T}_X.$$

Donc $U_1 \cap \cdots \cap U_k \in \mathcal{T}_Y$.

T3 : Soit $\{U_i : i \in I\}$ une collection d'éléments $U_i \in \mathcal{T}_Y \Longleftrightarrow \pi^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}_X$.
Alors,

$$\pi^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} U_i\Big) = \bigcup_{i \in I} \pi^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}_X.$$

Donc $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_Y$. $\square$

Lemme

Soit $\pi\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (X/\sim, \mathcal{T}^{quot}) = (Y, \mathcal{T}^{quot})$ *la projection et* $f\colon Y \to (Z, \mathcal{T}_Z)$. *Alors* f *est* $(\mathcal{T}^{quot}, \mathcal{T}_Z)$*-continue ssi* $f \circ \pi\colon X \to Z$ *est* $(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Z)$*-continue.*

On représente souvent cette situation par le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f\circ\pi"] \arrow[d, "\pi"'] & Z \\ Y \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Démonstration.

Si f est continue, alors $f \circ \pi$ est continue en tant que composition des applications continues.

Supposons que $f \circ \pi$ est continue. Soit $U \subset Z$ un ouvert. Puisque

$$(f \circ \pi)^{-1}(U) = \pi^{-1}(f^{-1}(U))$$

est ouvert, on a que $f^{-1}(U)$ est ouvert par définition de $\mathcal{T}^{quot}$. Alors, f est continue. $\square$

Exemple

Définissons $\sim$ sur $[0,1]$ par

$$0 \sim 1 \;(\Longrightarrow\; 1 \sim 0) \qquad \text{et} \qquad x \sim x \quad \forall x \in [0,1].$$

L'application $F\colon [0,1] \to S^1$ définie par $F(t) = \big(\cos(2\pi t),\ \sin(2\pi t)\big)$ est continue et $F(0) = F(1)$. Donc, on a l'application induite $f\colon [0,1]/\sim \to S^1$ qui est bijective et continue selon le lemme.

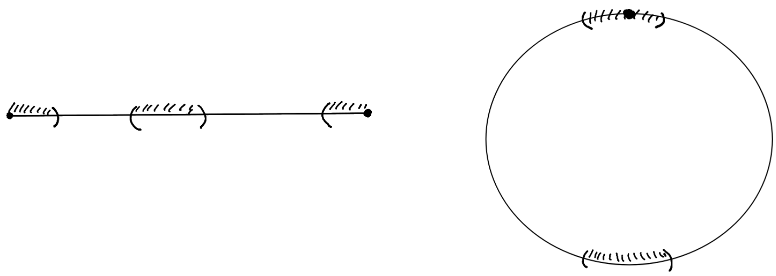
Pour montrer que f est un homéomorphisme, on montrera que $f\colon [0,1]/\sim \to S^1$ est fermée. Choisissons un fermé $A \subset [0,1]/\sim$ et supposons que $p = \lim f(q_n) \in S^1$ existe où $q_n \in A$. Puisque S^1 est un espace métrique, il suffit de montrer que $p \in f(A)$.

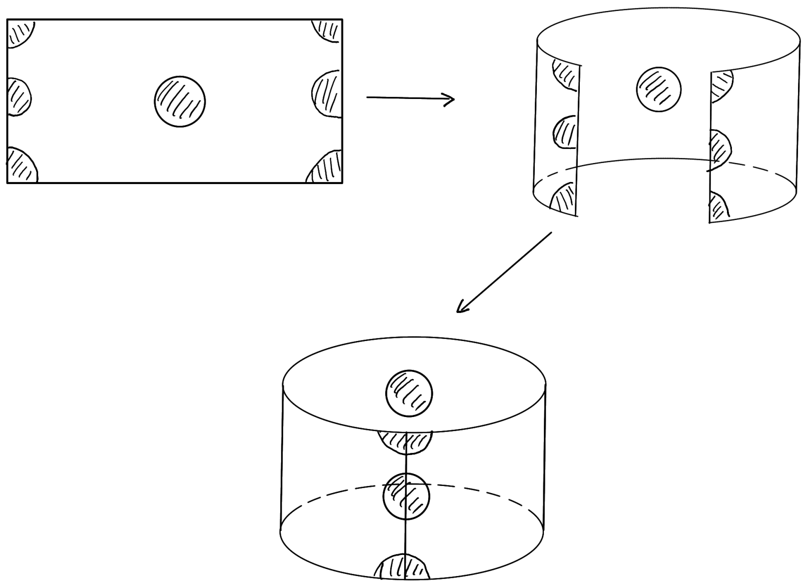
Choisissons $\tilde{q}_n \in [0,1]$ tq $\pi(\tilde{q}_n) = q_n$. Par le théorème de Bolzano–Weierstrass, il existe une sous-suite $\tilde{q}_{n_k}$ convergente. Alors, $\tilde{q} := \lim \tilde{q}_{n_k} \in \pi^{-1}(A)$ parce que $\pi^{-1}(A)$ est fermé.

Puisque F est continue,

$$p = \lim f(q_{n_k}) = \lim F(\tilde{q}_{n_k}) = F(\tilde{q}) = f\big(\pi(\tilde{q})\big) \in f(A).$$

Ainsi, $f(A)$ est fermé et donc f est un homéomorphisme.





Bien évidemment, $\pi : X \to X/\sim$ est continue si on munit $X/\sim$ de la topologie quotient. En fait, la topologie quotient est la plus grande topologie tq $\pi : X \to X/\sim$ est continue dans le sens suivant :

- Désignons par $\mathcal{T}_q$ la top. quotient sur $Y = X/\sim$. Si $\mathcal{T}'$ est une topologie sur Y telle que $\pi : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ est continue, alors $\mathcal{T}_Y \subset \mathcal{T}_q$.

Attention

$V \in \mathcal{T}_X \not\Longrightarrow \pi(V) \in \mathcal{T}_Y$ car pour $\pi : [0,1] \to [0,1]/\sim \,\cong S^1$ on a que $[0, \varepsilon)$ est ouvert dans $[0,1]$, mais $\pi\big([0,\varepsilon)\big)$ n'est pas ouvert dans S^1 !

Remarque

La topologie quotient est un exemple d'une construction plus générale : Soit $(X, \mathcal{T}_X)$ un espace topologique, Y un ensemble et $f : X \to Y$ une application surjective quelconque. On définit une topologie $\mathcal{T}_f$ sur Y comme la topologie quotient :

$$\mathcal{T}_f := \left\{ V \subset Y \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X \right\}.$$

C'est la plus grande topologie telle que f est continue.

Des relations d'équivalence apparaissent souvent par le biais d'actions de groupes.
Rappelons qu'un *groupe* est un ensemble G muni de deux applications

$$G \times G \to G, \quad (g,h) \mapsto g \cdot h \qquad \text{et} \qquad G \to G, \quad g \mapsto g^{-1}$$

telles que

G1 $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ pour tous $a, b, c \in G$;

G2 $\exists\, e \in G$ tq $e \cdot g = g = g \cdot e$ pour tout $g \in G$;

G3 $g \cdot g^{-1} = e = g^{-1} \cdot g$ pour tout $g \in G$.

Si en plus $g \cdot h = h \cdot g$ pour tous $g, h \in G$, le groupe G est dit *commutatif* ou *abélien*. Dans ce cas-là, on écrit habituellement

$g+h$ au lié de $g \cdot h$, $\quad$ 0 au lié de e $\quad$ et $\quad$ $-g$ au lié de g^{-1}.

Exemple

- Le groupe le plus simple : $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$.
- $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$.
- $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$;
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$ muni du produit matriciel ; $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$;
- $O(n) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^t = Id = A^t \cdot A\}$.

Définition (Opération de groupe)

Une opération (ou action) d'un groupe G sur un ensemble X est une application

$$G \times X \to X, \qquad (g,x) \mapsto g \cdot x$$

vérifiant les propriétés suivantes :

A1 $e \cdot x = x$ pour tout $x \in X$;

A2 $g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x$ pour tous $g, h \in G$ et pour tout $x \in X$.

Pour un $g \in G$ fixé, on désigne $L_g : X \to X$, $L_g(x) = g \cdot x$.

Attention

On ne doit pas confondre le produit $G \times G \to G$ avec une action $G \times X \to X$ même si la notation est la même.

Exemple

1. $G = \{1, -1\} \cong \mathbb{Z}_2$ opère sur $X = \mathbb{R}$ par $(-1) \cdot x = -x$ et $1 \cdot x = x$.
   $\{\pm 1\}$ opère aussi, par exemple, sur $\mathbb{R}^n$ et
   $$S^n = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$
   par multiplication de chaque x_j.
2. $(\mathbb{Z}, +)$ opère sur $X = \mathbb{R}$ par $(t, x) \mapsto t + x$.
3. Chaque groupe opère sur lui-même : $X = G$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$. Dans cet exemple $\cdot$ est identique.
4. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ opère sur $\mathbb{R}^n$ par
   $$(A, x) \mapsto A \cdot x = \Big(\sum_j a_{1j} x_j, \ \ldots, \ \sum_j a_{nj} x_j \Big)^t.$$

La relation d'équivalence associée à une opération

Chaque action de groupe donne lieu à une relation d'équiv. comme suit.

Lemme

Soit donnée une opération d'un groupe G sur X. La relation sur X définie par
$$x \sim x' \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists g \in G \quad tq \quad x' = g \cdot x$$
est une relation d'équivalence.

Démontrer ce lemme à titre d'exercice !

Dans ce cas, la classe d'équivalence $[x] = O_x$ d'un $x \in X$ s'appelle *l'orbite* de x. On désigne $X/\sim = X/G$.

Définition

Une action d'un groupe (discret) G sur un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dite continue si

$$L_g : X \to X, \qquad L_g(x) := g \cdot x$$

est continue pour tout $g \in G$.

Plus tard, nous verrons (?) les opérations dans le cas ou G est un groupe topologique (non-discret).

Proposition

Si G opère continûment sur X, L_g est un homéomorphisme pour tout $g \in G$.

Démonstration.

$$\left(L_{g^{-1}} \circ L_g\right)(x) = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1} \cdot g) \cdot x = e \cdot x = x \qquad \Longrightarrow \qquad L_{g^{-1}} \circ L_g = id_X.$$

De la même manière, $L_g \circ L_{g^{-1}} = id_X$. Alors, $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ existe et est continue. □

Le cercle / le tore

Considérons l'opération de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$:

$$(n, x) \longmapsto x + n.$$

Évidemment, toute orbite contient un représentant unique dans $[0, 1)$ $\Longleftrightarrow$ toute orbite contient un représentant unique dans $[0, 1]$ sauf O_1, qui contient exactement deux représentants : 0 et 1. Alors,

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong [0, 1]/\sim \cong S^1.$$

Exercice

Considérons l'opération de $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{R}^2$:

$$\big((n, m), (x, y)\big) \longmapsto (x + n,\ y + m).$$

Montrer que $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T$, ou T est le tore.

En utilisant le lemme sur la relation entre $f: X/G \to \mathbb{R}$ et $f \circ \pi: X \to \mathbb{R}$, on peut identifier $C^0(X/G)$ et

$$C^0_G(X) := \{ f \in C^0(X) \mid f(gx) = f(x) \}.$$

En particulière,

$$\left\{ \text{les fonctions sur } \mathbb{R} \text{ continues périodiques} \right\} \equiv C^0(S^1),$$

Exercice

Considérons l'opération de $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{R}^2$:

$$\big((n,m),(x,y)\big) \longmapsto (x+n,\ y+m).$$

Montrer que $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T$, où T est le tore.

Donc,

$$\left\{ \text{les fonctions sur } \mathbb{R}^2 \text{ continues bipériodiques} \right\} \equiv C^0(\mathbb{T}).$$

L'espace projectif

Définition

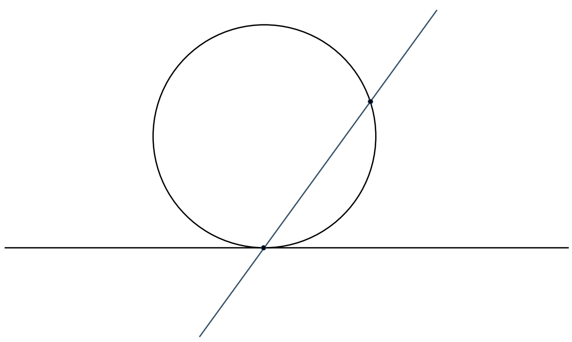
L'ensemble des droites vectorielles dans $\mathbb{R}^{n+1}$ s'appelle l'espace projectif réel. On désigne cette espace par $\mathbb{RP}^n$.

Nous démontrons plus tard que $\mathbb{RP}^n$ est un espace topologique. A ce moment-là, nous avons défini $\mathbb{RP}^n$ seulement comme un ensemble.

On peut comprendre $\mathbb{RP}^n$ comme un ensemble paramétrisant l'ensemble des droites vectorielles dans $\mathbb{R}^{n+1}$, càd que chaque point de $\mathbb{RP}^n$ correspond à une droite vectorielle dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exemple

Il y a une correspondance bijective (en fait, un homéomorphisme) entre $\mathbb{RP}^1$ et le cercle S^1



Rappelons qu'une droite vectorielle est un ensemble $\ell_v := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x = \lambda v\}$ où $v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Ainsi, on peut définir $\mathbb{RP}^n$ comme un ensemble quotient :

$$\mathbb{RP}^n := \left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right)/\sim, \qquad \text{où} \quad v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ tq } w = \lambda v.$$

De façon équivalente, puisque chaque droite intersecte la sphère en exactement deux points, qui sont antipodaux, nous avons également

$$\mathbb{RP}^n := S^n/\sim, \qquad \text{où} \quad v \sim w \iff w = \pm v.$$

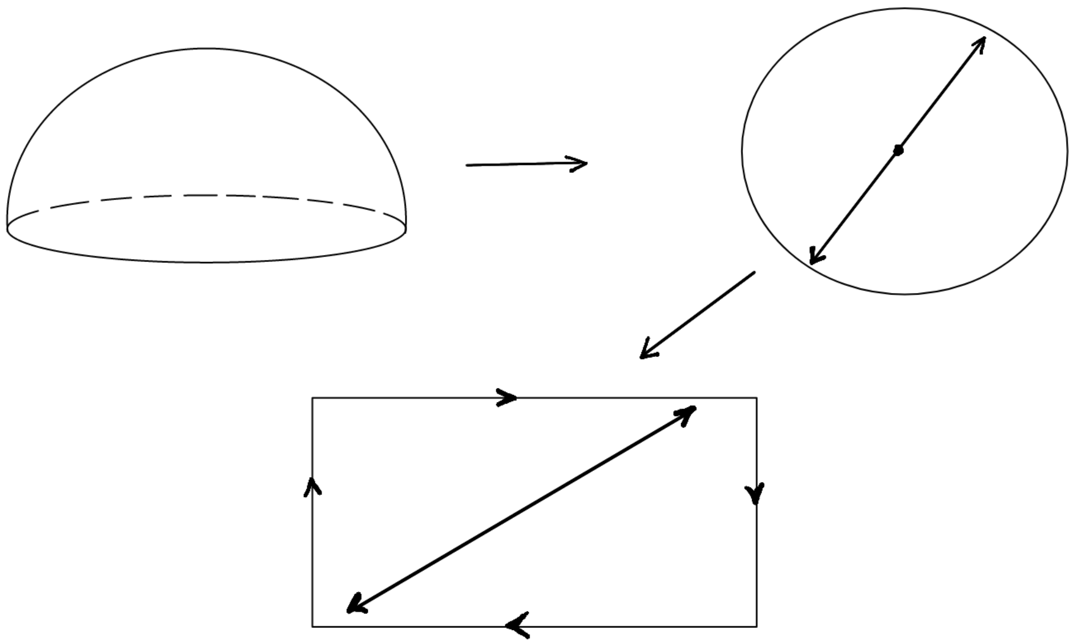
Ainsi, on a la projection canonique $\pi : S^n \to \mathbb{RP}^n$. On définit une topologie sur $\mathbb{RP}^n$ comme la topologie induite de S^n, càd que

$$\mathbb{RP}^n \supset V \text{ est ouvert} \qquad \iff \qquad S^n \supset \pi^{-1}(V) \text{ est ouvert.}$$

Le plan projectif $\mathbb{RP}^2$

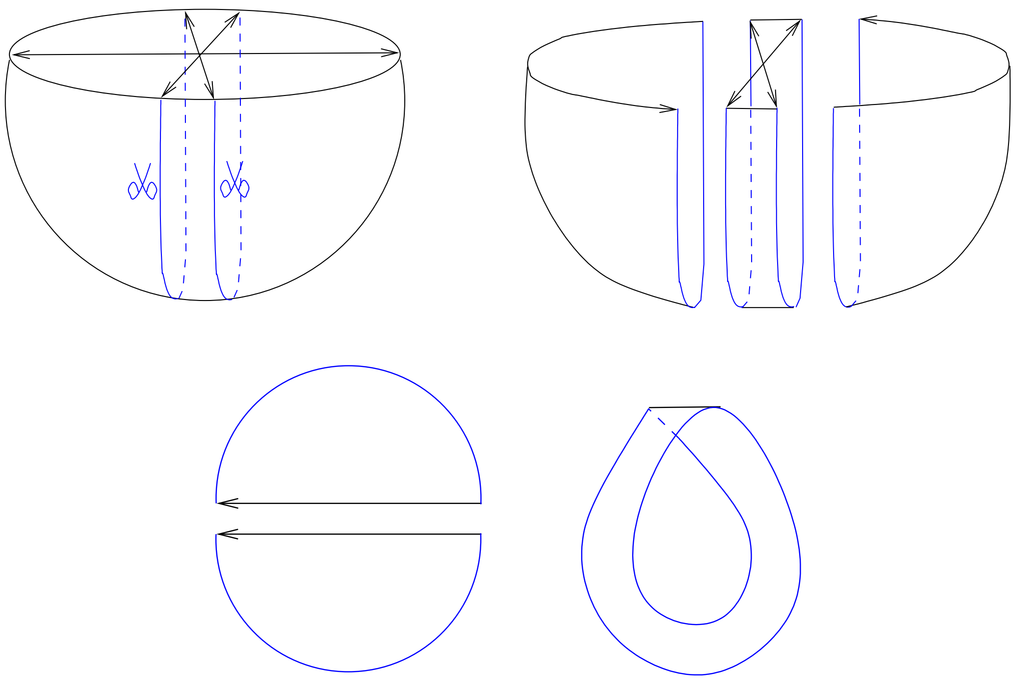
Exercice

1. Montrer que l'hémisphère
$$S^2_+ := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ z \geq 0\right\}$$
contient au moins un représentant de toute classe d'équivalence.
2. Montrer que l'hémisphère et le disque $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ sont homéomorphes ;
3. Montrer que le disque D et le rectangle R sont homéomorphes. Alors, S^2_+ et R sont homéomorphes aussi.



Comme dans le cas de la bouteille de Klein, on peut démontrer que le plan projectif ne peut pas se plonger dans $\mathbb{R}^3$.

Le plan projectif est un ruban de Moebius auquel on a collé un disque



Construction de la surface de Boy : https://www.youtube.com/watch?v=uiq-EcQz_uU.

Explorez le plan projectif vous-même : https://sketchfab.com/3d-models/boys-surface-bryant-kusner-d49b2e593962495b9deffb4206175dee.

Rappelons que dans un espace métrique la limite d'une suite est unique si elle existe.

Démonstration. Supposons que m_n est une suite dans un espace métrique (M,d) qui converge vers m et m'.

$$m = \lim m_n \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \text{tq} \quad m_n \in B_\varepsilon(m) \quad \text{si } n \geq N;$$
$$m' = \lim m_n \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N' \quad \text{tq} \quad m_n \in B_\varepsilon(m') \quad \text{si } n \geq N'.$$

Notons que si $m \neq m'$ et $r := d(m,m')/2 > 0$ on a $B_r(m) \cap B_r(m') = \varnothing$ parce que

$$\hat{m} \in B_\varepsilon(m) \cap B_\varepsilon(m) \implies$$
$$d(m,m') \leq d(m,\hat{m}) + d(\hat{m},m') < r + r = d(m,m').$$

Alors, si $m \neq m'$, pour $\varepsilon = r = d(m,m')/2$ et tout $n \geq \max\{N,N'\}$ on a $m_n \in B_\varepsilon(m) \cap B_\varepsilon(m')$. Il s'agit donc d'une contradiction qui montre que $m = m'$.

Le point clé de l'argument ci-dessus est le suivant : dans un espace métrique, si $m \neq m'$ il existe un voisinage U_x de x et un voisinage U_y de y tq $U_x \cap U_y = \varnothing$.

Attention

Dans un espace topolgique quelconque il n'est pas nécessaire que les voisinages U_x et U_y tq $U_x \cap U_y = \varnothing$ existent. Par exemple, dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie cofinie, l'intersection de deux ensembles ouverts quelconques est non vide.

Définition

Un espace topologique X est dit *de Hausdorff* si pour tout couple $x, y \in X$ de points distincts il existe des ouverts U_x, V_y tq

$$x \in U_x, \quad y \in U_y \quad \text{et} \quad U_x \cap U_y = \varnothing.$$

On abrège "un espace topologique de Hausdorff" à *un espace Hausdorff*.

Remarque

La terminologie française pour “espace de Hausdorff” est celle *d'espace séparé.*

Lemme

Une suite convergente dans un espace Hausdorff a une seule limite

Démonstration.

Supposons que x_n est une suite dans un espace Hausdorff X qui converge vers x et x'. Puisque X est Hausdorff, $\exists U \ni x$ et $\exists U' \ni x$ ouverts tq $U \cap U' = \varnothing$.

$$\begin{aligned} x = \lim x_n \quad &\Longrightarrow \quad \exists N > 0 \quad \text{tq} \quad x_n \in U \quad \text{si } n \geq N; \\ x' = \lim x_n \quad &\Longrightarrow \quad \exists N' > 0 \quad \text{tq} \quad x_n \in U' \quad \text{si } n \geq N'. \end{aligned}$$

Alors, pour tout $n \geq \max\{N, N'\}$ on a $x_n \in U \cap U'$, une contradiction. □

Propriétés des espaces de Hausdorff

Proposition

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace de Hausdorff et $x \in X$. Le singleton $\{x\}$ est une partie fermée de X.

Démonstration.

Choisissons $y \in X \backslash \{x\}$. Puisque X est Hausdorff, il existe deux voisinages U_x et U_y disjoints tels que $x \in U_x$ et $y \in V_y$. En particulier, $U_y \subset X \setminus \{x\}$. Alors

$$X \backslash \{x\} = \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_y$$

est ouvert en tant que la réunion des ouverts. Ainsi, $\{x\}$ est fermé. □

Remarque

Dans l'espace topologique $X = \{a, b\}$ muni de la topologie

$$\mathcal{T} := \left\{ \varnothing, X, \{a\} \right\}$$

le singleton $\{a\}$ n'est pas fermé. Par contre, $\{b\}$ est fermé.

Proposition

1. *Soient X un esp. Hausdorff et $A \subset X$ un sous-espace. Alors A est Hausdorff.*
2. *Soient X, Y deux espaces Hausdorff. Alors $X \times Y$ est Hausdorff pour la topologie produit.*
3. *Si X est Hausdorff et si X et Y sont homéomorphes alors Y est Hausdorff. En d'autres termes, être un espace Hausdorff est une propriété topologique.*

A titre d'exemple, nous prouvons 1. : Soient $a, b \in A$, $a \neq b$. En considérant a et b comme des points de X, qui est Hausdorff, on trouve $U_a, U_b \in \mathcal{T}_X$ tq

$$a \in U_a, \quad b \in U_b \quad \text{et} \quad U_a \cap U_b = \varnothing.$$

On dénote $V_a := U_a \cap A$ et $V_b := U_b \cap A$. Alors,

$$a \in V_a, \quad b \in V_b \quad \text{et} \quad V_a \cap V_b \subset U_a \cap U_b = \varnothing.$$

Proposition

Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ des espaces topologiques et $f, g : X \to Y$ des fonctions continues. Si $(Y, \mathcal{T}_Y)$ est Hausdorff, l'ensemble

$$E := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

est un fermé de X.

Démonstration.

Soit $x \in X \setminus E$, alors $f(x) \neq g(x)$. Comme Y est Hausdorff, $\exists U, V \in \mathcal{T}_Y$ tq

$$f(x) \in U, \quad g(x) \in V \quad \text{et} \quad U \cap V = \varnothing.$$

Puisque f et g sont continues, $f^{-1}(U)$ et $g^{-1}(V)$ sont des voisinages de x. Alors, $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) =: W$ est un voisinage de x aussi. Puisque

$$f(W) \subset f\big(f^{-1}(U)\big) \subset U \quad \text{et} \quad g(W) \subset g\big(g^{-1}(V)\big) \subset V,$$

on a que $f(W) \cap g(W) = \varnothing$. Alors, $X \setminus E$ est ouvert. $\square$

Corollaire

Soit X un espace topologique, A un sous-ensemble dans X tq $\bar{A} = X$ et Y un espace Hausdorff. Pour une application $f\colon A \to Y$, il existe au plus une fonction $F\colon X \to Y$ continue tq $F|_A = f$.

Démonstration.

Supposons qu'il existe deux prolongements $F, G\colon X \to Y$. Alors,

$$A \subset E = \left\{x \in X \mid F(x) = G(x)\right\} \subset X \quad \Longrightarrow$$
$$X = \bar{A} \subset \bar{E} = E \quad \Longrightarrow \quad E = X \quad \Longrightarrow \quad F = G.$$

□

Remarque

- Si le prolongement de f existe et est continu, $f\colon A \to Y$ est continue (par rapport à la topologie induite).
- Le prolongement peut exister ou non. Par exemple,

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} +1, & \text{si } x > 0, \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

  est continue sur $A := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mais ne permet pas un prolongement <u>continu</u> défini sur $\mathbb{R}$.

Exercice (*)

Trouver un exemple de l'application continue $f\colon A \to Y$ qui permet deux prolongements continus $\bar{A} \to Y$ (ainsi, Y ne peut pas être Hausdorff).

Définition

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Un sous-ensemble $A \subset X$ est dite *dense*, si $\bar{A} = X$. Autrement dite, A est dense, si chaque ouvert de X contient au moins un point de A.

Exemple

1. $(0,1)$ est dense dans $[0,1]$.
2. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est aussi dense dans $\mathbb{R}$.
4. Pour $(X, \mathcal{T}^{discr})$, seulement X est dense.
5. $\mathbb{Z}$ est dense dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}^{cofin})$. En fait, tout sous-ensemble infini est dense dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}^{cofin})$.

On peut reformuler le corollaire précédent comme suit.

Corollaire

Soit X un espace topologique, A un sous-ensemble dense dans X et Y un espace Hausdorff. Pour une application $f : A \to Y$, il existe au plus une fonction $F : \bar{A} \to Y$ continue tq $F|_A = f$.

Pour voir une application, dénotons par $M_n(\mathbb{R})$ l'espace de toutes les matrices de taille $n \times n$ à coefficients réels. $M_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension n^2. Un isomorphisme $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2}$ est donné par

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \longmapsto (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}).$$

En particulier, $M_n(\mathbb{R})$ est un espace métrique (alors, topologique). Explicitement,

$$d_2(A, B) := \Big(\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} - b_{ij})^2 \Big)^{1/2}.$$

Lemme

Le sous-ensemble

$$GL_n(\mathbb{R}) := \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\right\} \subset M_n(\mathbb{R})$$

est dense.

Démonstration.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R}) \iff \det A = 0$. Pour trouver une $B \in GL_n(\mathbb{R})$ proche de A considérons le polynôme caractéristique de A

$$\chi_A(\lambda) := \det\left(\lambda\, id - A\right) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n,$$

où $a_j = a_j(A) \in \mathbb{R}$. Puisque $\chi_A \not\equiv 0$, il a au plus n racines (et $\lambda = 0$ est une racine). Alors, $\exists \lambda_0 > 0$ tq la seule racine de χ_A dans $(-\lambda_0, \lambda_0)$ est 0. Si $\lambda_k \to 0$ et $\lambda_k \neq 0$ on a que $\left(A - \lambda_k\, id\right) \in GL_n(\mathbb{R})$ converge vers A et

$$\det(A - \lambda_k id) = (-1)^n \chi_A(\lambda_k) \neq 0.$$

Donc, $A \in \overline{GL_n(\mathbb{R})}$ et ainsi, $\overline{GL_n(\mathbb{R})} = M_n(\mathbb{R})$. □

Revenons au polynôme caractéristique

$$\chi_A(\lambda) := \det\left(\lambda\, id - A\right) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n.$$

Évidemment, $a_n = \chi_A(0) = (-1)^n \det A$ et $a_1(A) = -\mathrm{Tr}\, A$. C'est un peu plus compliqué pour les autres coefficients.

Même si l'on ne peut pas exprimer facilement a_j par les coefficients de A, on peut en établir certaines propriétés comme suit. Si $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$,

$$\det\left(P^{-1}AP\right) = \det A \quad \Longrightarrow \quad \chi_{P^{-1}AP} = \chi_A \quad \Longrightarrow \quad \chi_{QP} = \chi_{PQ}, \qquad (*)$$

où $Q = P^{-1}A \iff A = PQ$.

Théorème

(*) s'applique à toutes $P, Q \in M_n(\mathbb{R})$. En d'autres termes, $a_j(PQ) = a_j(QP)$.

Remarque

Bien sûr, pour $j = n$ et $j = n-1$ on a les identités bien connues :

$$\det(PQ) = \det(QP) \quad \text{et} \quad Tr\,(PQ) = Tr\,(QP).$$

Démonstration.

Notons que nous avons montré que $\chi_{QP} = \chi_{PQ}$ pour toutes $Q \in M_n(\mathbb{R})$ et toutes $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, pour Q fixée, considérons

$$f\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n, \qquad f(P) = \chi_{PQ} - \chi_{QP},$$

où $\mathcal{P}_n$ est l'ensemble de tous les polynômes de degré au plus n. Comme pour M_n, on peut identifier $\mathcal{P}_n$ avec $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$b_0\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \cdots + b_n \longmapsto \left(b_0, b_1, \ldots, b_n\right).$$

En particulier, $\mathcal{P}_n$ peut être muni de la topologie Hausdorff.

L'application $M_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n$, $A \mapsto \chi_A$ est continue puisque tout a_j est un polynôme de coefficients de A.

L'application $M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $P \mapsto PQ$ est continue puisqu'elle est linéaire. Alors, $M_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n$, $P \mapsto \chi_{PQ}$ est continue comme composition. Ainsi, f est continue et $f \equiv 0$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors, $f = 0$ partout puisque $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense. □

Quand les espaces quotients sont-ils Hausdorff ?

Un quotient d'un espace Hausdorff n'a pas besoin d'être Hausdorff.

Exemple

1. Considérons la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$:
$$x \sim y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(x \text{ et } y \in \mathbb{Q}\right) \text{ OU } \left(x \text{ et } y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\right).$$
Donc, rationnel ∼ rationnel, irrationnel ∼ irrationnel, mais rationnel $\nsim$ rationnel. Alors, $\mathbb{R}/\sim = \{a, b\}$ muni de la topologie grossière (plus petite). Ainsi, $\mathbb{R}/\sim$ n'est pas Hausdorff.
2. Considérons la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$:
$$x \sim y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \text{ et } y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad 0 \sim 0.$$
Ainsi, $\mathbb{R}/\sim = \{a, b\}$ en tant qu'ensemble, mais la topologie est différente
$$\mathcal{T} = \left\{\varnothing, \{a, b\}, \{a\}\right\}.$$
C'est l'exemple non trivial le plus simple d'un espace non Hausdorff.

Théorème

Soit X un espace topologique muni d'une opération continue d'un groupe G. Supposons que $\forall x, x' \in X$ tq $O_x \neq O_{x'}$ $\exists$ un voisinage U de x et un voisinage U' de x' tq

$$U \cap gU' = \varnothing \qquad \forall g \in G.$$

Alors, X/G est Hausdorff (et $\pi : X \to X/G$ est une application ouverte).

Démonstration.

Soit $U \subset X$ ouvert et $V := \pi(U)$. Puisque

$$\pi^{-1}(V) = \bigcup_{g \in G} gU \tag{$*$}$$

est ouvert comme la réunion des ouverts, $V \subset X/G$ est ouvert par définition de la topologie induite. Ainsi, π est une application ouverte. □

Démonstration (suite).

Soient maintenant x, x' et U, U' comme dans la formulation de ce théorème. Donc, $V = \pi(U)$ est un voisinage de $[x]$, $V' = \pi(U')$ est un voisinage de $[x']$ et on a

$$\pi^{-1}(V \cap V') = \pi^{-1}(V) \cap \pi^{-1}(V').$$

En utilisant $(*)$, on obtient

$$\pi^{-1}(V \cap V') = \Big(\bigcup_{g \in G} gU\Big) \bigcap \Big(\bigcup_{h \in G} hU'\Big) = \bigcup_{g,h \in G} \big(gU \cap hU'\big).$$

Puisque

$$gU \cap hU' = g\big(U \cap g^{-1}hU'\big) = \varnothing,$$

on obtient $\pi^{-1}(V \cap V') = \varnothing$. Enfin, par la surjectivité de π on obtient $V \cap V' = \varnothing$. Ainsi, X/G est Hausdorff. □

Exemple

1. Considérons l'opération de $(\mathbb{Z},+)$ sur $X = \mathbb{R}$ définie par $(n,x) \mapsto x+n$. Pour $x, x' \in \mathbb{R}$ tq $O_x \neq O_{x'}$, posons
$$\delta := \frac{1}{4} \inf\left\{|x - x' - n| \ : \ n \in \mathbb{Z}\right\} > 0.$$
Il suit que $U := (x-\delta,\ x+\delta)$ et $U' := (x'-\delta,\ x'+\delta)$ satisfont l'hypothèse du théorème. Alors, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est un espace Hausdorff.
Exercice : Montrer, que l'application $F\colon \mathbb{R} \to S^1$ définie par $F(t) = \big(\cos 2\pi t,\ \sin 2\pi t\big)$ induit un homéomorphisme $f\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$.

2. Considérons l'opération de $\mathbb{Z}^2$ sur $X = \mathbb{R}^2$ définie par $\big((n,m),(x,y)\big) \mapsto (x+n,\ y+m)$.
Exercice : Montrer, que l'espace quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est Hausdorff et que l'application $F\colon \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$ definie par
$$F(x,y) = \big(\cos 2\pi x,\ \sin 2\pi x,\ \cos 2\pi y,\ \sin 2\pi y\big)$$
induit un homéomorphisme $f\colon \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to S^1 \times S^1$.

Exemple (suite)

3. Considérons l'opération de $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ sur $X = S^n$ définie par
$$\varepsilon \cdot x = \big(\varepsilon x_0, \ldots, \varepsilon x_n\big).$$
Si $O_x \neq O_{x'}$, on a $x \neq x'$ et donc on peut trouver des voisinages $U_0 \ni x$ et $U_0' \ni x'$ tq $U_0 \cap U_0' = \varnothing$ parce que S^n est Hausdorff. De la même manière, il existe des voisinages $U_1 \ni x$ et $U_1' \ni -x'$ tq $U_1 \cap U_1' = \varnothing$. Donc, si on pose
$$U := U_0 \cap U_1 \qquad \text{et} \qquad U' := U_0' \cap \big(-U_1'\big)$$
on obtient $U \cap U' = \varnothing = U \cap (-U')$. Ainsi, $S^n/\mathbb{Z}_2$ est Hausdorff.

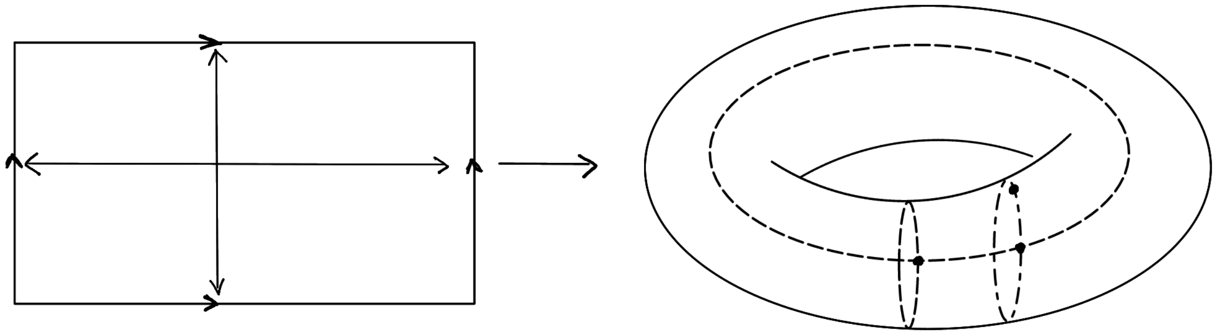
$S^2/\mathbb{Z}_2$ est clairement le plan projectif $\mathbb{RP}^2$, càd que le plan projectif est un espace Hausdorff.

Le tore (revisité)

Considérons l'opération de $\mathbb{Z}^2$ sur $X = \mathbb{R}^2$ comme dans l'exemple 2.

Exercice

Montrer que le carré $R := [0,1] \times [0,1]$ contient au moins un représentant de toute classe d'équivalence. En plus, chaque $(x, y) \in (0,1) \times (0,1)$ est l'unique représentant de sa classe d'équivalence.



Visuellement, il y a une bijection entre le tore et $S^1 \times S^1$. On a démontré déjà qu'en fait, c'est un homéomorphisme.

Espaces connexes

Intuitivement un espace est connexe s'il ne tombe pas en plusieurs morceaux.

Définition

Un espace topologique X est dit *connexe* si

$$X = U \cup V \quad \text{et} \quad U \cap V = \varnothing \quad \Longrightarrow \quad U = \varnothing \quad \text{ou} \quad V = \varnothing$$

lorsque U et V sont ouverts.

Si X n'est pas connexe, il existe des ouverts $U \neq \varnothing$ et $V \neq \varnothing$ tq

$$X = U \cup V \quad \text{et} \quad U \cap V = \varnothing \quad \Longrightarrow \quad U = X \setminus V \text{ est fermé.}$$

Bien sûr, $V = X \setminus U$ est fermé aussi. Donc, U et V sont ouverts et fermés simultanément.

Exemple (non-exemples)

- $(X, \mathcal{T}^{discr})$ n'est pas connexe (si X contient au moins 2 points) : $X = \{x_0\} \cup \big(X \setminus \{x_0\}\big)$.
- $(0,1) \cup (1,2)$ n'est pas connexe.

Lemme

Soit $A \subset X$ un sous-espace d'un espace topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *A est connexe par rapport a la topologie induite ;*
2. *Pour tous ouverts U_1 U_2 de X tq*
$$A \subset U_1 \cup U_2 \qquad \text{et} \qquad U_1 \cap U_2 \cap A = \varnothing, \tag{$*$}$$
on a soit $A \subset U_1$, soit $A \subset U_2$.

Démonstration.

1. $\Longrightarrow$ 2. Soient $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_X$ tq $(*)$. Désignons $V_j := U_j \cap A \in \mathcal{T}_A$. Alors,
$$A = V_1 \cup V_2 \quad \text{et} \quad V_1 \cap V_2 = \varnothing \qquad \Longrightarrow \qquad V_1 = \varnothing \quad \text{ou} \quad V_2 = \varnothing.$$
Donc, $A \subset U_2$ ou $A \subset U_1$.

2. $\Longrightarrow$ 1. Soient $V_1, V_2 \in \mathcal{T}_A$ tq
$$A = V_1 \cup V_2 \quad \text{et} \quad V_1 \cap V_2 = \varnothing. \tag{$**$}$$
Alors, il existe $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_X$ tq $V_j = U_j \cap A$. $(**) \Longrightarrow (*) \Longrightarrow$ $A \subset U_1$ ou $A \subset U_2$ $\Longrightarrow$ $V_2 = \varnothing$ ou $V_1 = \varnothing$. □

Proposition

$[0,1]$ *est connexe.*

Démonstration.

Supposons que $[0,1]$ est non-connexe. Alors, $[0,1] = U \cup V$, où $U \neq \varnothing$ et $V \neq \varnothing$ sont ouverts <u>et</u> fermés. En outre, on peut supposer que $0 \in U$.

Posons
$$\tau := \sup \left\{ t \in [0,1] \mid [0,t] \subset U \right\}.$$

Cas A : $\tau = 1$. Puisque τ est un point limite de U et U est fermé, $\tau \in U$. Puisque U est ouvert, $\exists \varepsilon > 0$ tq $(1-\varepsilon, 1] \subset U$. De plus, puisque $\tau = 1$, $\exists t > 1 - \varepsilon$ tq $[0,t] \subset U$. Alors, on a que
$$[0,1] = [0,t] \cup (1-\varepsilon, 1] \subset U \qquad \Longrightarrow \qquad V = \varnothing.$$
Contradiction.

Cas B : $\tau < 1$. On peut supposer que $\tau > 0$ (Pourquoi ?). La démonstration de cas A implique que $\tau \in U$. Puisque U est ouvert, $\exists \varepsilon > 0$ tq $(\tau - 2\varepsilon, \tau + 2\varepsilon) \subset U \Longrightarrow [0, \tau + \varepsilon] \subset U \Longrightarrow \tau \neq \sup$. Contradiction aussi. □

Remarque

La même démonstration montre que on fait chaque intervalle

$$[a,b], \quad (a,b], \quad [a,b) \quad \text{et} \quad (a,b) \tag{$*$}$$

est connexe. En fait, un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est connexe (par rapport à la topologie induite) ssi A est un intervalle, càd

$$a_0, a_1 \in A, \quad a_0 \le a_1 \quad \Longrightarrow \quad [a_0,\ a_1] \subset A. \tag{$**$}$$

Exercice

Montrer que $(**)$ implique que A est l'un des éléments de la liste $(*)$, où on admet aussi des intervalles (semi-)infinis, par exemple $(-\infty, b]$.

Proposition

Soit $f\colon X \to Y$ une application continue entre deux espaces topologiques. Si X est connexe, alors $f(X) \subset Y$ est connexe pour la topologie induite.

Démonstration.

Supposons que $f(X)$ est non-connexe :

$$f(X) = U \cup V, \qquad U, V \in \mathcal{T}_{f(X)}, \quad U \cap V = \varnothing, \quad U \ne \varnothing \text{ et } V \ne \varnothing.$$

Par déf. de la top. induite, $\exists\ \tilde{U}, \tilde{W} \in \mathcal{T}_Y$ tq $U = f(X) \cap \tilde{U}$ et $V = f(X) \cap \tilde{V}$.
Puisque f est continue,

$$A := f^{-1}(\tilde{U}) = f^{-1}(U) \qquad \text{et} \quad B := f^{-1}(\tilde{V}) = f^{-1}(V)$$

sont ouverts dans X. De plus,

$$X = A \cup B \qquad A \cap B = \varnothing, \quad A \ne \varnothing \text{ et } B \ne \varnothing.$$

puisque

$$X = f^{-1}\big(f(X)\big) = f^{-1}\big(U \cup V\big) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = A \cup B$$

et $U, V \ne \varnothing \implies A, B \ne \varnothing$. Alors, X est non-connexe, une contradiction. $\square$

Remarque

Dans cette proposition seulement X est supposé être connexe. En particulier, Y peut être non-connexe.

Comme corollaire, on obtient

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires)

Supposons que X est connexe et $f \in C^0(X)$. Si $y_0 := f(x_0) \leq y_1 := f(x_1)$, alors toutes les valeurs $y \in [y_0,\ y_1]$ sont atteintes par f, càd l'équation

$$f(x) = y$$

a une solution pour tout $y \in [y_0,\ y_1]$.

Démonstration.

Puisque $f(X) \subset \mathbb{R}$ est connexe et $y_0, y_1 \in f(X)$, l'intervalle $[y_0, y_1]$ est contenu dans $f(X)$. □

Ainsi, le théorème des valeurs intermédiaires pour fonctions $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est un corollaire de la connexité de l'intervalle sauf qu'en général les sup et inf ne sont pas toujours atteintes.

Proposition

Être connexe est une propriété topologique, càd

$$\begin{array}{l} X \text{ est connexe et} \\ X \text{ et } Y \text{ sont homéomorphes} \end{array} \implies Y \text{ est connexe.}$$

Démonstration.

Supposons que $f\colon X \to Y$ est un homéomorphisme. Puisque X est connexe, $Y = f(X)$ est connexe aussi. □

Lemme

Un espace topologique X est non-connexe si et seulement s'il existe une fonction continue $f: X \to \{0,1\}$ et surjective ($\Leftrightarrow$ non-constante), où $\{0,1\}$ est muni de la topologie discrète.

Démonstration.

Supposons $\exists f$. Soit $U = f^{-1}(0)$ et $V = f^{-1}(1)$. Evidemment $X = U \cup V$. Puisque $\{0\}$ et $\{1\}$ sont des ouverts de $\{0,1\}$, U et V sont des ouverts de X. Puisque f est surjective ni U ni V n'est vide. Donc X est non-connexe.

Supposons que X est non-connexe. Alors

$$X = U \cup V, \qquad U, V \in \mathcal{T}_X, \quad U \cap V = \varnothing, \quad U \neq \varnothing \text{ et } V \neq \varnothing.$$

Définissons $f: X \to \{0,1\}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in U, \\ 1 & \text{si } x \in V. \end{cases}$$

C'est une fonction continue puisque $f^{-1}(0) = U$ et $f^{-1}(1) = V$ sont des ouverts. En outre, f est surjective puisque ni U ni V ne sont vides. □

Proposition

Un produit $X \times Y$ de deux espaces topologiques est connexe si et seulement si X et Y sont connexes.

Démonstration.

Supposons que $X \times Y$ est connexe. Alors $X = p_1(X \times Y)$ et $Y = p_2(X \times Y)$ sont les images d'applications continues définies sur un espace connexe.

Supposons que X, Y sont connexes et que $F: X \times Y \to \{0,1\}$ est continue. Puisque $\iota_y: X \to X \times Y$, $\iota_y(x) = (x, y)$, est continue (pourquoi ?) $\forall\, y \in Y$, on a que

$$f_y: X \to \{0,1\}, \qquad f_y = F \circ \iota_y \quad \Longleftrightarrow \quad f_y(x) = F(x, y)$$

est continue. Alors, f_y est constante parce que X est connexe. De la même manière,

$$f_x: Y \to \{0,1\}, \qquad f_x(y) = F(x, y)$$

est constante $\forall x \in X$. Alors, pour tout $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ on a que

$$F(x, y) = f_x(y) = f_x(y') = F(x, y') = f_{y'}(x) = f_{y'}(x') = F(x', y'),$$

càd que F est constante. □

Exemple

- $\mathbb{R}^n$ est connexe ;
- Tout rectangle est connexe.

Proposition

Soit X un espace topologique et $A \subset X$ une partie connexe de X. Alors $\bar{A}$ est aussi connexe.

Démonstration.

Soit $f : \bar{A} \to \{0,1\}$ une fonction continue. Alors,

$$f|_A : A \to \{0,1\} \quad \text{est continue} \quad \Longrightarrow \quad f|_A \quad \text{est constante} \equiv 1.$$

Puisque $\left(\{0,1\}, \mathcal{T}^{discr}\right)$ est Hausdorff et A est dense dans $\bar{A}$, il existe au plus une fonction continue $F: \bar{A} \to \{0,1\}$ tq $F|_A \equiv 1$. Cette fonction existe bien et est évidemment la fonction constante. Par l'unicité, $f : \bar{A} \to \{0,1\}$ est constante. Donc, $\bar{A}$ est connexe. □

Connexité par arcs

Définition

Un espace topologique X est dit *connexe par arcs* si pour tout $x_0, x_1 \in X$ il existe un application continue $\gamma: [0,1] \to X$ tel que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = x_1$. Dans ce cas-là, γ s'appelle un chemin (arc) joignant x_0 à x_1.

Exemple

- $[0,1]$ est connexe par arcs : $\gamma(t) = (1-t)x_0 + tx_1$. Par contre, $[0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ n'est pas connexe par arc (Pourquoi ?).
- $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs (Pourquoi ?).
- Si $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est connexe par arc : Si x_0 et x_1 ne sont pas colinéaires, on peut définir
$$\gamma(t) = (1-t)x_0 + tx_1.$$
Sinon, on choisit x_2 qui n'est pas colinéaire avec x_0 et définit γ par exemple par
$$\gamma(t) = \begin{cases} (1-2t)x_0 + 2t\,x_2 & \text{si } t \in [0,1/2] \\ (2-2t)x_2 + (2t-1)x_1 & \text{si } t \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Exemple (suite)

- S^n est connexe par arcs si $n \geq 1$: Pour démontrer cela, on constate que
$$\pi\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n, \qquad \pi(x) := \frac{x}{\|x\|}$$
est continue et surjective. Pour $x_0, x_1 \in S^n$ on choisit $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tq $\pi(y_j) = x_j$. Si γ est un chemin dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ joignant y_0 à y_1, alors $\pi \circ \gamma$ est un arc dans S^n joignant x_0 à x_1. Ainsi, S^n est connexe par arcs.
- Si X et Y sont connexes par arcs, alors $X \times Y$ est aussi connexe par arcs : Pour deux points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) on choisit un chemin γ_X dans X joignant x_0 à x_1 et un chemin γ_Y dans Y joignant y_0 à y_1. On definit
$$\gamma\colon [0,1] \to X \times Y, \qquad \gamma(t) = \big(\gamma_X(t),\ \gamma_Y(t)\big).$$
C'est un chemin dans $X \times Y$ joignant (x_0, y_0) à (x_1, y_1).

Proposition

Soit X un espace topologique qui est connexe par arcs. Alors X est connexe.

Démonstration.

Supposons que X n'est pas connexe, càd $X = U \cup V$, où U et V sont des ouverts tq $U \cap V = \varnothing$. Choisissons $x_0 \in U$ et $x_1 \in V$. Puisque X est connexe par arcs, $\exists\gamma$ joignant x_0 à x_1.

Notons
$$A := (\operatorname{Im}\gamma) \cap U \qquad \text{et} \qquad B := (\operatorname{Im}\gamma) \cap V.$$
Les deux sous-ensembles sont ouverts dans $\operatorname{Im}\gamma$ par rapport à la topologie induite. De plus,
$$x_0 \in A \implies A \neq \varnothing \qquad \text{et} \qquad x_1 \in B \implies B \neq \varnothing.$$
Ainsi, $\operatorname{Im}\gamma$ n'est pas connexe, qui est une contradiction.

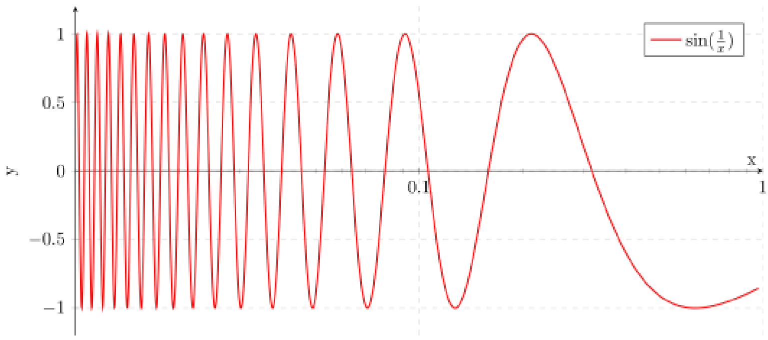
$\square$

Cependant,

$$X \text{ est connexe} \quad \not\Longrightarrow \quad X \text{ est connexe par arcs.}$$

Pour construire un exemple, considérons

$$X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y = \sin\frac{1}{x}\right\} \cup \left\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid\ y \in [-1,1]\right\}$$
$$= \overline{\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y = \sin\frac{1}{x}\right\}}.$$



Cet espace est connexe en tant que l'adhérence d'un espace connexe. Cependant, X n'est pas connexe par arcs : Soit π_0 la restriction de $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\pi(x,y) = x$, sur X. Alors, $\pi_0 : X \to [0,\infty)$ est continue et surjective. Si γ est un chemin joignant $(0,0)$ à $(1/2\pi, 0)$, $\pi_0 \circ \gamma : [0,1] \to [0, \frac{1}{2\pi}]$ est continue et donc surjective. Neanmoins, γ ne peut pas être continue en $t = 0$.

Composantes connexes

Nous allons montrer qu'un espace topologique X peut toujours s'écrire comme une union disjointe de sous-espaces connexes, appelés les *composantes connexes*.

Lemme

Soit X un espace topologique. Supposons qu'il existe une collection $\{A_i \subset X : i \in I\}$ de sous-espaces telle que

1. *Pour tout $i \in I$, A_i est connexe.*
2. *Pour tout $i, j \in I$, $A_i \cap A_j \neq \varnothing$.*

Alors, $A = \bigcup_i A_i$ est un sous-espace connexe. En particulier, si $X = \bigcup_i A_i$ alors X est connexe.

Démonstration.

Soit $f : A \to \{0,1\}$ continue. Puisque chaque A_i est connexe, $f|_{A_i}$ est constante. Écrivons $f(A_i) = \{p_i\}$ où $p_i = 0$ ou 1. Mais pour tout $i, j \in I$, $A_i \cap A_j \neq \varnothing$ donc $p_i = p_j$ ce qui implique que f est constante sur A. □

Définition

Soit X un espace topologique. Si $x \in X$, la composante connexe de X, notée C_x, est la réunion de tous les sous-ensembles connexes de X qui contiennent x.

Lemme

La composante connexe de x est connexe. De plus C_x est fermé dans X et deux composantes connexes C_x et C_y sont soit disjointes, soit égales.
C_x est le plus grand sous ensemble connexe de X qui contient x au sens où tout sous-ensemble connexe C' de X qui contient C_x coïncide avec C_x.

Démonstration.

Soient C_i et C_j deux sous-ensembles connexes contenants x. Donc, $C_i \cap C_j$ est non-vide et ainsi

$$\bigcup_{i \in I} \{ C_i \mid C_i \ni x \text{ et } C_i \text{ est connexe } \}$$

est toujours connexe par le lemme précédent. En particulier, C_x est connexe en tant que la réunion de tous sous-ensembles connexes contenants x. $\square$

Lemme

La composante connexe de x est connexe. De plus C_x est fermé dans X et deux composantes connexes C_x et C_y sont soit disjointes, soit égales.
C_x est le plus grand sous ensemble connexe de X qui contient x au sens où tout sous-ensemble connexe C' de X qui contient C_x coïncide avec C_x.

Démonstration (suite).

Puisque C_x est connexe, alors $\bar{C}_x$ est connexe. Donc, $\bar{C}_x$ est un sous-ensemble connexe qui contient $x \implies C_x \supset \bar{C}_x$ puisque C_x est la réunion de tous sous-ensembles connexes contenants $x \implies C_x = \bar{C}_x \Leftrightarrow$ C_x est fermé.

Si $C_x \cap C_y \neq \varnothing$, alors $C_x \cup C_y$ est connexe $\implies C_x = C_x \cup C_y = C_y$.

Si C' est connexe et contient x, alors $C' \subset C_x$. Si de plus $C' \supset C_x$, on a nécessairement que $C' = C_x$. $\square$

Remarque

Supposons que le nombre des composantes connexes d'un espace topologique X est fini, donc

$$X = C_1 \cup \cdots \cup C_k.$$

Puisque tout C_i est fermé, le sous-ensemble $C_2 \cup \cdots \cup C_k$ est fermé. Donc, C_1 est ouvert en tant que le complément d'un fermé. De même, tout C_j est ouvert (et fermé).

Remarque

On peut définir les composantes connexes par arcs de la même manière. Bien que cette deux notions soient très proches, en général les composants connexes par arc et les composants connexes sont différents. Par exemple, l'espace

$$\overline{\{(x, \sin 1/x) \mid x > 0\}}$$

a seulement une composante connexe, mais deux composantes connexes par arcs.

Variétés topologiques

Définition

Soit $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Un espace topologique Hausdorff X s'appelle *une variété topologique* de dimension n si tout point de X possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Pour expliquer : Si X est une variété topologique, alors X admet un recouvrement ouvert $\{U_i \mid i \in I\}$ tq pour tout $i \in I$ il existe un homéomorphisme $\varphi_i : U_i \to V_i$, où $V_i \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert.

Exemple

1. $\mathbb{R}^n$ est une variété topologique de dimension n. Plus généralement, tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une variété topologique de dimension n.
2. $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est une variété topologique de dimension n : S^n est Hausdorff comme un sous-espace de $\mathbb{R}^{n+1}$. De plus, $\{S^n \setminus \{S\}, S^n \setminus \{N\}\}$ est un recouvrement ouvert et on a déjà montré que $S^n \setminus \{S\}$ et $S^n \setminus \{N\}$ sont homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ (projection stéréographique).

Exemple (suite)

3. Le tore est une variété topologique de dimension 2. De la même manière, le ruban de Möbius, la bouteille de Klein et le plan projectif sont des variétés topologiques de dimension 2.
4. La réunion de deux droites qui se croisent, n'est pas une variété topologique (Pourquoi ?).
5. La réunion de deux sphères qui se touchent en un point n'est pas une variété topologique (Pourquoi ?).

Exercice

Démontrer que l'espace projectif $\mathbb{RP}^n$ est une variété topologique de dimension n.

Théorème

Une variété topologique X est connexe ssi elle est connexe par arcs.

Démonstration.

On a de démontrer qu'une variété topologique connexe est connexe par arcs. On choisit un point $x_0 \in X$ quelconque et désigne

$$\mathcal{C}_{x_0} := \Big\{x_1 \in X \mid \exists \gamma \in \mathcal{C}^0\big([0,1];\ X\big)\ \text{tq}\ \gamma(0) = x_0\ \text{et}\ \gamma(1) = x_1\Big\}.$$

On va démontrer que $\mathcal{C}_{x_0}$ est ouvert. Soit $x_1 \in \mathcal{C}_{x_0}$ quelconque et $\varphi : U \to V$ un homéomorphisme comme dans la définition d'une variété topologique. Puisque $V \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, alors on peut trouver $r > 0$ tq $B_r\big(\varphi(x_1)\big) \subset V$. Désignons

$$U' := \varphi^{-1}\Big(B_r\big(\varphi(x_1)\big)\Big),$$

qui est un voisinage de x_1. Notons, que U' est connexe par arcs parce que U' est homéomorphe à $B_r\big(\varphi(x_1)\big)$. □

Démonstration (suite).

Si $x' \in U'$ et $\delta \in \mathcal{C}^0\big([0,1];\ U'\big)$ tq $\delta(0) = x_1$ et $\delta(1) = x'$, pour le chemin

$$\varepsilon(t) := \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \in [0,1/2], \\ \delta(2t-1) & \text{si } t \in [1/2,1] \end{cases}$$

on a $\varepsilon(0) = x_0$ et $\varepsilon(1) = x'$. Ainsi, $U' \subset \mathcal{C}_{x_0}$ et, donc, $\mathcal{C}_{x_0}$ est ouvert.

On va démontrer que $X \smallsetminus \mathcal{C}_{x_0}$ est ouvert. En effet, si $y \notin \mathcal{C}_{x_0}$, on peut choisir un voisinage U_y de y qui est homéomorphe à une boule ouverte dans $\mathbb{R}^n$. Si $U_y \cap \mathcal{C}_{x_0} \neq \varnothing$, un argument similaire donne que $y \in \mathcal{C}_{x_0}$. Ainsi, $U_y \subset X \smallsetminus \mathcal{C}_{x_0}$ et, donc, $X \smallsetminus \mathcal{C}_{x_0}$ est ouvert. Puisque $x_0 \in \mathcal{C}_{x_0} \implies \mathcal{C}_{x_0} \neq \varnothing$, par la connexité de X on a forcément que

$$X \smallsetminus \mathcal{C}_{x_0} = \varnothing \qquad \iff \qquad X = \mathcal{C}_{x_0}.$$

□

Exercice

On dit d'un espace topologique X qu'il est localement connexe par arcs si $\forall x \in X$ il existe un voisinage U de x qui est connexe par arcs. Généraliser la démonstration ci-dessus pour montrer que tout espace connexe et localement connexe par arcs est connexe par arcs.

Compacité par recouvrements

Rappelons que toute fonction continue $[a,b] \to \mathbb{R}$ est bornée.

Question

Pour quels espaces topologiques X les fonctions continues $f\colon X \to \mathbb{R}$ sont-elles toutes bornées ?

Observation : Toute fonction continue $f\colon X \to \mathbb{R}$ est *localement bornée*, càd pour tout $x \in X$ $\exists$ un voisinage V_x de x tq f est bornée sur V_x.

Donc, nous avons un “recouvrement” de X par des ouverts

$$X = \bigcup_{x \in X} V_x$$

sur lesquels f est bornée. Si on pouvait trouver un « sous-recouvrement » fini tq

$$X = V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_k},$$

alors on pourrait conclure que f est bornée sur X.

Ceci motive les définitions suivantes.

Définition

Soit $A \subset (X, \mathcal{T})$ un sous-espace d'un espace topologique. Un *recouvrement ouvert de A* est une collection

$$\mathcal{U} = \{U_i \in \mathcal{T} : i \in I\}$$

d'ouverts tel que $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.
Un sous-recouvrement du recouvrement $\mathcal{U}$ de A est une sous-collection $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ qui est encore un recouvrement de A.
Un recouvrement est dit *fini* s'il contient un nombre fini d'éléments.

Définition

Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit *compact* si tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement fini.

Attention

- Parfois, dans la définition de la compacité, on exige aussi que X est Hausdorff.
- La définition ne dit pas seulement qu'il existe un recouvrement fini. Il doit être possible de trouver un sous-recouvrement fini quel que soit le recouvrement donné.

Exemple

- Un sous-ensemble fini est toujours compact.
- Chaque ensemble X muni de la topologie cofinie est compact (ici, $A = X$) : Soit $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ un recouvrement ouvert quelconque. Choisissons un $U_{i_0} \in \mathcal{U}$. Alors,
$$X \setminus U_{i_0} = \{x_1, \ldots, x_k\}.$$
$\mathcal{U}$ est un recouvrement $\implies \forall x_j \in X \setminus U_{i_0} \quad \exists U_{i_j} \in \mathcal{U}$ tq $x_j \in U_{i_j}$. Alors,
$$X = U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k}.$$
- $\mathbb{R}$ n'est pas compact : Posons
$$\mathcal{U} = \{U_n := (-n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$
Évidemment, $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert qui n'admet pas un sous-recouvrement fini (Pourquoi ?).

Lemme

Soit $A \subset X$ un sous-espace d'un espace topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *A est compact par rapport a la topologie induite;*
2. *De tout recouvrement de A par des ouverts de X on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Démonstration.

1. $\Longrightarrow$ 2. Soit $\mathcal{U} = \left\{U_i \in \mathcal{T}_X \mid i \in I\right\}$ un recouvrement ouvert de A quelconque. Alors, $\{U_i \cap A \mid i \in I\}$ est un recouvrement ouvert (par rapport à la topologie induite). Donc, la compacité de A implique que

$$A = \left(U_1 \cap A\right) \cup \cdots \cup \left(U_k \cap A\right) = \left(U_1 \cup \cdots \cup U_k\right) \cap A.$$

Donc, $A \subset U_1 \cup \cdots \cup U_k$.

2. $\Longrightarrow$ 1. Soit $\mathcal{V} := \left\{V_i \in \mathcal{T}_A \mid i \in I\right\}$ un recouvrement ouvert quelconque. Par définition de la top. induite, $\forall i \in I \quad \exists U_i \in \mathcal{T}_X$ tq $V_i = U_i \cap A$. Donc,

$$A = \bigcup_{i \in I} V_i \qquad \Longrightarrow \qquad A = \bigcup_{i \in I}\left(U_i \cap A\right) = A \cap \left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) \qquad \Longrightarrow \qquad A \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Alors, $A \subset U_1 \cup \cdots \cup U_k \implies A = A \cap \left(U_1 \cup \cdots \cup U_k\right) = V_1 \cup \cdots \cup V_k$. □

Théorème (Heine–Borel)

$[0, 1]$ *est compact (par rapport à la topologie standard).*

Démonstration.

Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement de $[0, 1]$ par des ouverts de $\mathbb{R}$. Désignons

$$\tau := \sup\left\{t \in [0, 1] \mid \exists \text{ un sous-recouvrement fini qui recouvre } [0, t]\right\}.$$

Évidemment, $\tau > 0$.

On veut démontrer que $\tau = 1$. Supposons que $\tau < 1$. Puisque $\mathcal{U}$ est un recouvrement de $[0, 1]$, $\exists U_0 \in \mathcal{U}$ tq $\tau \in U_0$. Puisque U_0 est ouvert, $\exists \delta > 0$ tq $(\tau - \delta,\ \tau + \delta) \subset U_0$. Par définition de τ, $\exists t_0 \in (\tau - \delta,\ \tau]$ tq l'intervalle $[0, t_0]$ admet un sous-recouvrement fini : $\{U_1, \ldots, U_k \mid U_j \in \mathcal{U}\}$. Alors,

$$\left\{U_0, U_1, \ldots, U_k\right\}$$

est un sous-recouvrement fini de $[0, \tau + \delta]$, ce qui est impossible. Ainsi, $\tau = 1$.

Enfin, le même argument montre en fait que $[0, 1]$ admet un sous-recouvrement fini. □

Théorème

Soit $f\colon X \to Y$ continue. Si X est compact, alors $f(X) \subset Y$ est compact (par rapport à la topologie induite du Y).

Démonstration.

Soit $\{U_i \in \mathcal{T}_Y \mid i \in I\}$ un recouvrement de $f(X)$, càd

$$f(X) \subset \bigcup_{i \in I} U_i \qquad \Longrightarrow \qquad X \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i).$$

Puisque f est continue, $\{f^{-1}(U_i) \mid i \in I\}$ est un recouvrement ouvert de X. Par la compacité de X,

$$X = f^{-1}(U_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_k) = f^{-1}\big(U_1 \cup \cdots \cup U_k\big)$$
$$\Longrightarrow \ f(X) \subset U_1 \cup \cdots \cup U_k.$$

Ainsi, $f(X)$ est compact. □

En tant qu'illustration, considérons $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ muni de la topologie quotient. Soit $\pi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la projection canonique. Donc, π est continue et

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \pi(\mathbb{R}) = \pi\big([0,1]\big).$$

Puisque $[0,1]$ est compact, alors $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est compact aussi.

De la même manière, on peut démontrer que le tore, la bouteille de Klein et le plan projectif sont compacts.

Corollaire

Compacité est une propriété topologique.

Corollaire

Chaque fonction continue $f\colon X \to \mathbb{R}$ sur un espace X compact est bornée.

Démonstration.

Considérons le recouvrement ouvert de $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{U} := \{U_n := (-n,n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Puisque $f(X) \subset \mathbb{R}$ est compact, il existe un sous-recouvrement fini, disons $\{U_{n_1}, \ldots, U_{n_k}\}$. Posons $n = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Alors,

$$f(X) \subset U_{n_1} \cup \cdots \cup U_{n_k} = (-n,n).$$

Ainsi, f est bornée. □

Proposition

Un fermé d'un espace compact est lui-même compact.

Démonstration.

Soit F un fermé dans un espace compact X. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de F quelconque. Alors, $\mathcal{U} \cup \{X \setminus F\}$ est un recouvrement ouvert de X. Puisque X est compact, il existe un sous-recouvrement fini :

$$U_1, U_2, \ldots, U_k.$$

Si $U_i \in \mathcal{U}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, on a trouvé un sous-recouvrement fini de X (et, donc, de F). Si l'un de ces ensembles, disons U_k, est $X \setminus F$, on considère

$$U_1, U_2, \ldots, U_{k-1}. \tag{$*$}$$

Puisque $\bigcup_{i=1}^{k} U_i = X$, on a que $\bigcup_{i=1}^{\mathbf{k-1}} U_i$ contient tous les points de $X \setminus U_k = X \setminus \left(X \setminus F\right) = F$. Ainsi, $(*)$ est un sous-recouvrement de F fini. □

L'inverse n'est généralement pas vrai, càd un compact n'est pas nécessairement fermé (Considérez $(X, \mathcal{T}^{cofin})$). Cependant, c'est vrai si X est Hausdorff.

Proposition

Si X est un espace Hausdorff et $A \subset X$ est un sous-espace compact, alors A est fermé.

Démonstration.

Choisissons $x \in X \setminus A$. $\forall a \in A \quad \exists U_a \in \mathcal{T}_X \quad$ et $\quad \exists V_a \in \mathcal{T}_X$ tq $a \in U_a, x \in V_a$ et $U_a \cap V_a = \varnothing$. Évidemment, $\mathcal{U} := \left\{U_a \mid a \in A\right\}$ est un recouvrement ouvert de A. Alors, il existe un sous-recouvrement fini :

$$A \subset U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_k}.$$

Soient $V_{a_1}, \ldots, V_{a_k}$ les voisinages de x correspondants et $V_x := V_{a_1} \cap \cdots \cap V_{a_k}$.

L'ouvert V_x est un voisinage de x qui est disjoint de $U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_k}$ et donc de A. Ainsi, $V_x \subset X \setminus A$ et alors $X \setminus A$ est ouvert. □

Théorème (Théorème des valeurs extrêmes)

Une fonction continue $f: X \to \mathbb{R}$ sur un espace X compact est bornée et atteint son maximum et son minimum.

Démonstration.

On a déjà montré que f est bornée. Puisque $f(X) \subset \mathbb{R}$ est compact dans un espace Hausdorff, $f(X)$ est fermé.

Si $A \subset \mathbb{R}$ est un sous-ensemble fermé et borné, alors $\sup A \in A$ et $\inf A \in A$ (les point limites de A sont contenus dans A). Ainsi, f atteint son maximum et son minimum. □

Formulation équivalente en termes de fermés

Proposition

Un espace topologique X est compact ssi pour toute collection $\mathcal{F} = \{F_i \text{ fermé de } X; i \in I\}$ de fermés de X tq $\bigcap_{i \in I} F_i = \varnothing$, il existe un sous-ensemble $\{F_{i_1}, \ldots, F_{i_k}\}$ fini tq $\bigcap_{j=1}^{k} F_{i_j} = \varnothing$.

Démonstration.

Supposons que X est compact et $\mathcal{F}$ est une collection de fermés comme ci-dessus. Alors, $\mathcal{U} := \left\{ U_i := X \setminus F_i \mid i \in I \right\}$ est une collection des ouverts. De plus,

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} \left(X \setminus F_i\right) = X \setminus \left(\bigcap_{i \in I} F_i\right) = X \setminus \varnothing = X.$$

Donc, $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert $\Longrightarrow$ $\exists$ un sous-recouvrement fini : $\left\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}\right\}$. Mais cela implique que

$$\varnothing = X \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k} U_{i_j}\right) = X \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k} (X \setminus F_{i_j})\right) = \bigcap_{j=1}^{k} F_{i_j}.$$

La direction inverse : Exercice. □

Corollaire

Soit X un espace compact et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de fermés tq $F_n \neq \varnothing$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots \qquad \Longrightarrow \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing.$$

Démonstration.

Supposons que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \varnothing$. Comme X est compact, il existe $F_{n_1}, \dots, F_{n_k}$ tq $\bigcap_{i=1}^k F_{n_i} = \varnothing$. Quitte à renommer les fermés, on peut supposer que $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$. Alors, $\bigcap_{i=1}^k F_{n_i} = F_{n_k} \neq \varnothing$. Contradiction. □

La compacité de produites

Théorème

Soit X, Y deux espaces topologiques. Alors le produit $X \times Y$ est compact ssi X et Y sont tous les deux compacts.

Démonstration.

Supposons que $X \times Y$ est compact. Puisque p_1 est continue, $X = p_1(X \times Y)$ est compact en tant que l'image d'un espace compact.

Supposons que X et Y sont compacts. Soit $\mathcal{W}$ un recouvrement ouvert de $X \times Y$. Soit $x \in X$ fixé. Puisque $\mathcal{W}$ est un recouvrement de $X \times Y$, $\forall y \in Y$ $\exists W(y) \in \mathcal{W}$ tq $(x, y) \in W(y)$. Par définition de la topologie produit, $\exists U(y) \subset X$ et $\exists V(y) \subset Y$ tq

$$(x, y) \in U(y) \times V(y) \subset W(y).$$

La collection $\{V(y) : y \in Y\}$ est un recouvrement ouvert de Y. La compacité de Y implique qu'il existe un sous-recouvrement fini, disons $V(y_1), \dots, V(y_r)$. Posons

$$U(x) = U(y_1) \cap \dots \cap U(y_r).$$

Démonstration (suite).

Alors pour tout $i = 1, \ldots, r$,

$$U(x) \times V(y_i) \subset U(y_i) \times V(y_i) \subset W(y_i)$$

Donc

$$U(x) \times Y \subset U(x) \times \bigcup_{i=1}^{r} V(y_i) \subset \bigcup_{i=1}^{r} W(y_i)$$

Maintenant la collection $\{U(x) : x \in X\}$ est un recouvrement ouvert de X. Il existe donc un sous-recouvrement fini $\{U(x_1), \ldots, U(x_s)\}$. Chaque sous-espace $U(x_i) \times Y$ est recouvert par un nombre fini d'ouvert du recouvrement $\mathcal{W}$. Donc $X \times Y$, étant la réunion (finie) des $U(x_i) \times Y$ pour $1 \leq i \leq s$, est aussi recouvert par un nombre fini d'éléments du recouvrement $\mathcal{W}$.

□

Critère automatique d'homéomorphisme

Nous avons déjà vu qu'en général

$$f\colon X \to Y \text{ est continue et bijective} \quad \not\Longrightarrow \quad f^{-1} \text{ est continue.}$$

Cependant, on a le résultat suivant :

Proposition

Soit $f\colon X \to Y$ une bijection continue. Si X est compact et Y est Hausdorff, alors f est un homéomorphisme.

Démonstration.

Soit G un fermé de X. Puisque G est fermé dans X qui est compact, alors G est compact. Comme f est continue, $f(G)$ est aussi compact. Puisque Y est Hausdorff, $f(G)$ est un fermé de Y. Ainsi, f est une application fermée et, donc, un homéomorphisme. □

En tant qu'application, on a le résultat suivant.

Proposition

L'espace quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *est homéomorphe à l'ensemble* $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ *muni de la topologie induite par celle de* $\mathbb{R}^2$.

Démonstration.

On définit l'application

$$\varphi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1, \qquad [x] \mapsto e^{2i\pi x}.$$

On a déjà vu que φ est continue et bijective. Comme $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est compact et S^1 est Hausdorff, φ est alors un homéomorphisme. □

Exercice

1. Considérons l'opération du groupe $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{R}^2$:
$$(n, m) \cdot (x, y) = (x + n,\ \ y + m).$$
Prouver que $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est homéomorphe au tore $\mathbb{T}$. De plus, prouver que le tore est homéomorphe à $S^1 \times S^1$ muni de la topologie produit.
2. Prouver que $S^2/\{\pm 1\}$ est homéomorphe au plan projectif.

Définition

Un sous-ensemble $A \subset M$ d'un espace métrique est dit borné s'il existe $R > 0$ et $m_0 \in M$ tq $A \subset B(m_0, R)$.

Exercice

Montrer que A est borné ssi une des propriétés suivantes est vérifiée :

- $\forall m_0 \in M \quad \exists R = R_{m_0}$ tq $A \subset B_R(m_0)$.
- $\exists C > 0$ tq pour tout $x, y \in A$, $d(x, y) \leq C$.

Proposition

Soit M un espace métrique. Si $K \subset M$ est compact, alors K est borné et fermé.

Démonstration.

Puisque pour tout $m_0 \in M$ la fonction $K \to \mathbb{R}, \quad K \ni m \mapsto d(m, m_0)$ est continue, alors elle est bornée, càd que K est bornée. K est fermé en tant qu'un sous-ensemble compact d'un espace Hausdorff. □

Théorème

Un sous-ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ est compact ssi K est borné et fermé.

Démonstration.

Soit K borné par rapport à la métrique d_∞ ($\Leftrightarrow$ K est borné par rapport à la métrique euclidienne puisque les deux métriques sont équivalentes). Alors, il existe $R > 0$ tq $d_\infty(m, 0) \leq R$, càd

$$K \subset [-R, R]^n.$$

$[-R, R]^n$ est compact en tant que le produit de sous-ensembles compacts. Puisque K est un sous-ensemble fermé, alors K est compact. □

Remarque

En général, un sous-ensemble borné et fermé d'un espace métrique quelconque n'est pas compact. Par exemple, un sous-ensemble A quelconque d'un espace discret est toujours borné et fermé. Cependent, A n'est pas compact si A est infini.

Les normes sur $\mathbb{R}^n$

Définition

Soit $(E,+)$ un espace vectoriel. Une *norme sur E* est une application $N : E \to [0,+\infty)$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- Pour $x \in E$, $N(x) = 0 \iff x = 0$
- (Inégalité triangulaire) $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ pour tous $x, y \in E$.
- (Homogénéité) $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$.

Exemple

Les normes suivantes sont des exemples classiques sur $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$:

- $$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n;$$
- $$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n$$
- $$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n$$

Exercice

Supposons que N est une norme sur E. Montrer que $d_N(x,y) = N(x-y)$ définit une métrique sur E. Donc, tout espace vectoriel normé est un espace métrique.

Théorème

Soient N_1 et N_2 des normes sur $\mathbb{R}^n$. Alors N_1 et N_2 sont équivalentes, càd qu'il existe des constante $A, B > 0$ tq

$$A\, N_2(x) \leq N_1(x) \leq B\, N_2(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

En particulier, si N est une norme sur $\mathbb{R}^n$, la topologie métrique associée à la distance $d_N(x,y) = N(x-y)$ coïncide avec la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration.

Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$ quelconque. Il suffit de montrer que N est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$ parce que

$$N_1(x) \leq B\|x\|_\infty \quad \text{et } \|x\|_\infty \leq \frac{1}{A} N_2(x) \qquad \Longrightarrow \qquad N_1(x) \leq \frac{B}{A} N_2(x).$$

□

Démonstration (suite).

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base standard de $\mathbb{R}^n$. Désignons $C := \sum_{i=1}^n N(e_i) > 0$.

$$N(x) = N\Big(\sum x_i e_i\Big) = \sum |x_i| N(e_i) \leq \sum \|x\|_\infty N(e_i) \leq C\|x\|_\infty.$$

En remplaçant x par $x - y$, on obtient $N(x-y) \leq C\|x-y\|_\infty$. Donc, $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue par rapport à d_∞. Puisque

$$S_\infty := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty = 1 \right\}$$

est borné et fermé (pourquoi ?), alors S_∞ est compact. Donc, la restriction de N sur S_∞ atteint son minimum $A := \inf \left\{ N(x) \mid x \in S_\infty \right\} = N(x_0) > 0$. Ainsi, si $x \neq 0$, on a que

$$A \leq N\Big(\frac{x}{\|x\|_\infty}\Big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad A\|x\|_\infty \leq N(x).$$

□

Attention

Le théorème implique que les métriques d_{N_1} et d_{N_2} sont équivalantes si N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}^n$ quelconques. Cependant, le théorème n'implique pas que toutes les distances sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes !

Compacité par suites

Définition

Un sous-espace $K \subset M$ d'un espace métrique est dit *séquentiellement compact* si toute suite $(x_n) \subset K$ possède une sous-suite qui converge vers un point de K.

Théorème

Un sous-espace $K \subset M$ d'un espace métrique est compact ssi K est séquentiellement compact.

La preuve de ce théorème consiste en plusieurs étapes.

Lemme

Soit $(x_n) \subset X$ une suite dans un espace métrique. Écrivons $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Supposons que x est un point limite de S. Alors il existe une sous-suite de (x_n) qui converge vers x.

La preuve découle du fait suivant : tout point limite de A est la limite d'une suite (a_k) tq $a_k \in A$. Détails : *Fine, Bertelson, Premoselli. Intro à la topologie.*

Proposition

Soit $K \subset M$ un sous-espace compact d'un espace métrique. Alors K est séquentiellement compact.

Démonstration.

Si S est fini, il doit exister au moins un point $x \in K$ qui est répété un nombre infini de fois dans (x_n). Ainsi, dans ce cas-là, il existe une sous-suite constante, alors convergente.

Supposons que S est infini. Il suffit de démontrer que S a un point limite dans K. Supposons qu'il n'existe pas de point limite de S dans K. Donc, $\forall x \in K \quad \exists \varepsilon(x) > 0$ tq $S \cap \left(B_{\varepsilon(x)}(x) \setminus \{x\}\right) = \varnothing$. Considérons
$$\mathcal{U} = \left\{B_{\varepsilon(x)}(x) \mid x \in K\right\}.$$
La compacité de K implique qu'il existe un sous-recouvrement fini :
$$K \subset B_{\varepsilon(x_1)}(x_1) \cup \cdots \cup B_{\varepsilon(x_r)}(x_r).$$
Mais les boules contiennent chacune au plus un point de S donc, ensemble, elles ne contiennent pas plus que r points de S. Ceci contredit le fait que S est infini. □

Corollaire (Bolzano–Weierstrass)

Soit $(x_n) \subset \mathbb{R}^n$ une suite bornée. Alors elle possède une sous-suite convergente.

Démonstration.

Par l'hypothèse, $\exists R > 0$ tq $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \bar{B}_R(0)$. Alors,
$$\bar{S} \subset \overline{\bar{B}_R(0)} = \bar{B}_R(0),$$
parce que $\bar{B}_R(0)$ est fermé. Puisque $\bar{S}$ est borné et fermé, alors $\bar{S}$ est compact par Heine–Borel. Ainsi, (x_n) possède une sous-suite convergente. □

Lemme (A)

Soit M un espace métrique séquentiellement compact et soit $\mathcal{U} = \left\{ U_i \mid i \in I \right\}$ un recouvrement ouvert de M. Alors il existe un $r > 0$ avec la propriété suivante : $\forall m \in M \;\; \exists U = U_{i(m)} \in \mathcal{U} \;\; tq \;\; B_r(m) \subset U$.

Démonstration.

Supposons qu'un tel $r > 0$ n'existe pas. Alors, $\forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists m_n \in M$ tq $B_{1/n}(m_n) \not\subset U_i$ pour tout $i \in I$. Puisque M est séquentiellement compact, la suite (m_n) possède une sous-suite (m_{n_k}) qui converge vers un $m \in M$. Puisque $\mathcal{U}$ est un recouvrement, il existe $U_i \in \mathcal{U}$ tq $m \in U_i$. Alors, $\exists r > 0$ tq $B_r(m) \subset U_i$ parce que U_i est ouvert.

Maintenant, prenons k si grand que $d(m_{n_k}, m) < r/2$ et $1/n_k < r/2$. On a

$$B_{1/n_k}(m_{n_k}) \subset B_r(m)$$

parce que

$$m' \in B_{1/n_k}(m_{n_k}) \implies d(m, m') \leq d(m, m_{n_k}) + d(m_{n_k}, m') < r/2 + 1/n_k < r.$$

Ainsi, on obtient une contradiction, parce que $B_{1/n_k}(m_{n_k}) \subset B_r(m) \subset U_i$. □

Lemme (B)

Soit (m_n) une suite dans un espace métrique. Si (m_n) converge, alors (m_n) est une suite de Cauchy, càd $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N > 0 \;\; tq \;\; d(m_p, m_q) < \varepsilon$ lorsque $p, q \geq N$.

La démonstration est laissée au lecteur.

Lemme (C)

Soit M un espace métrique séquentiellement compact et $r > 0$ quelconque. Alors, il existe un sous-ensemble fini $\{m_1, \ldots, m_p\} \subset M$ tq

$$\bigcup_{i=1}^{p} B_r(m_i) = M.$$

Démonstration.

Supposons qu'aucune collection finie de boules $\{B_r(m_i) \mid 1 \leq i \leq p\}$ n'est pas un recouvrement de M. Donc, $\forall m_1 \in M \;\; \exists m_2 \in M \setminus B_r(m_1)$. Puisque $M \neq B_r(m_1) \cup B_r(m_2)$, $\exists m_3 \in M \setminus \big(B_r(m_1) \cup B_r(m_2)\big)$. Ainsi, on obtient une suite m_n avec la propriété suivante :

$$m_n \notin B_r(m_1) \cup \cdots \cup B_r(m_{n-1}).$$

Puisque M est séquentiellement compact, il existe une sous-suite (m_{n_k}) convergent. Mais (m_{n_k}) n'est pas une suite de Cauchy parce que $d(m_{n_k}, m_{n_{k-1}}) \geq r$. Ceci est une contradiction. □

Corollaire

Si M est un espace métrique séquentiellement compact, alors M est compact.

Démonstration.

Soit $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ un recouvrement ouvert quelconque. Soit $r > 0$ donné par le lemme A. Pour ce r, on peut choisir un recouvrement fini :

$$\{B_r(m_1), \ldots, B_r(m_n)\}.$$

Puisque $B_r(m_j) \subset U_{i(j)}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, la collection

$$\{U_{i(1)}, \ldots, U_{i(n)}\}$$

est un sous-recouvrement de $\mathcal{U}$. □

Question : Étant donné deux espaces topologiques, disons X et Y, comment peut-on décider s'ils sont homéomorphes ou non ?

Il n'y a pas de méthode générale. Une possibilité est de procéder de la manière suivante.

Une considération naïve. On choisit un espace simple, par exemple le cercle S^1. Si les espaces $C^0(S^1, X)$ et $C^0(S^1, Y)$ sont différents, alors X et Y ne sont pas homéomorphes. Cela soulève la question suivante :

Question : Comment peut-on décider si les espaces $C^0(S^1, X)$ et $C^0(S^1, Y)$ sont différents ?

Parfois, on peut démontrer que les composants connexes (par arcs) de $C^0(S^1, X)$ et $C^0(S^1, Y)$ sont différents. Par exemple, si on peut démontrer que $C^0(S^1, X)$ est connexe par arcs et $C^0(S^1, Y)$ n'est pas connexe par arcs, on conclut que X et Y ne sont pas homéomorphes.

C'est cette approche qui se révèle effective et que nous décrivons ici plus en détail.

Soit X un espace topologique quelconque. Nous rappelons qu'un arc joignant $x_0 \in X$ et $x_1 \in X$ est une application $\gamma \colon [0, 1] \to X$ continue tq $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = x_1$. On note $I := [0, 1]$.

Définition

Deux arcs $\gamma_0, \gamma_1 \colon I \to X$ tq $\gamma_0(0) = x_0 = \gamma_1(0)$ et $\gamma_0(1) = x_1 = \gamma_1(1)$ sont dits *homotopes relativement à* $\{0, 1\}$ s'il existe une application continue $h : I \times I \to X$ avec les propriétés suivantes :

1. $h(t, 0) = \gamma_0(t)$ pour tout $t \in I$;
2. $h(t, 1) = \gamma_1(t)$ pour tout $t \in I$;
3. $h(0, s) = x_0$ pour tout $s \in I$;
4. $h(1, s) = x_1$ pour tout $s \in I$.

L'application h qui apparaît dans la définition ci-dessus s'appelle *une homotopie* entre γ_0 et γ_1.

Si γ_0 et γ_1 sont homotopes, on écrit $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ rel $\{0, 1\}$ (ou, simplement $\gamma_0 \simeq \gamma_1$).

Si on definit $\gamma_s : I \to X$ par $\gamma_s(t) = h(t,s)$, on peut penser de la famille $\{\gamma_s \mid s \in I\}$ comme un arc (dans $C^0(I,X)$) joignant γ_0 et γ_1. Alors, informellement, γ_0 et γ_1 sont homotopes, si on peut déformer continûment γ_0 vers γ_1 (en préservant les extrémités).

Proposition

Si X est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ convexe, alors tous les arcs (joignants x_0 et x_1) sont homotopes.

Démonstration.

Posons

$$h(t,s) := (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t).$$

Une vérification directe montre que c'est une homotopie entre γ_0 et γ_1. □

Lemma

$\simeq$ rel $\{0,1\}$ *est une relation d'équivalence sur l'ensemble de tous les arcs dans X joignant x_0 et x_1.*

Démonstration.

La réflexivité est évidente.

Si h est une homotopie entre γ_0 et γ_1, alors $\hat{h}(t,s) := h(t,1-s)$ est une homotopie entre γ_1 et γ_0. Donc, $\simeq$ est symétrique.

Soient h une homotopie entre γ_0 et γ_1 et $\tilde{h}$ une homotopie entre γ_1 et γ_2, donc

$$\tilde{h}(t,0) = \gamma_1(t) \qquad \text{et} \qquad \tilde{h}(t,1) = \gamma_2(t)$$

(de plus, on a toujours que les extrémités sont préservées). On definit

$$H(t,s) := \begin{cases} h(t,2s) & \text{si } s \in [0,1/2], \\ \tilde{h}(t,2s-1) & \text{si } s \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Puisque $h(t,1) = \gamma_1(t) = \tilde{h}(t,0)$, l'application H est continue. De plus, H préserve les extrémités. Ainsi, H est une homotopie entre γ_0 et γ_2 qui montre la transitivité. □

Soit γ un arc joignant x_0 et x_1 ; soit β un arc joignant x_1 et x_2. On définit un arc $\gamma * \beta$ par

$$\gamma * \beta(t) := \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2], \\ \beta(2t-1) & \text{si } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Notons que $\gamma * \beta$ est continu et joigne x_0 à x_2.

Remarque

« Le produit » $\gamma * \beta$ est bien défini seulement si $\gamma(1) = \beta(0)$!

Lemme

Si $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ rel $\{0, 1\}$ *et* $\beta_0 \simeq \beta_1$ rel $\{0, 1\}$, *alors*

$$\gamma_0 * \beta_0 \simeq \gamma_1 * \beta_1 \text{ rel } \{0, 1\}.$$

La démonstration est à vous comme exercice.

Soit X un espace topologique quelconque. On choisit $x_0 \in X$. Considérons

$$\Omega(X, x_0) := \left\{ \gamma \text{ est un arc dans } X \text{ joignant } x_0 \text{ à } x_1 = x_0 \right\}.$$

Tout élément γ de $\Omega(X, x_0)$ s'appelle un lacet (base en x_0). Un lacet est simplement une application continue $\gamma : S^1 \to X$ tq $\gamma(0) = x_0 = \gamma(1)$, ou on pense de S^1 comme $[0, 1]/\sim$.

Définition

L'ensemble

$$\pi_1(X, x_0) = \Omega(X, x_0)/\simeq$$

s'appelle *le groupe fondamental* de X (base en x_0).

Notons qu'à ce stade, $\pi_1(X, x_0)$ est bien défini seulement comme un ensemble. On va justifier le nom plus tard.

Si γ est un lacet, $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ s'appelle la classe d'équivalence de γ. On peut voir $[\gamma]$ comme la composante connexe par arcs de γ dans $\Omega(X, x_0)$ (nous n'essayons pas ni de prouver cela ni même de définir une topologie sur $\Omega(X, x_0)$).

Théorème

$\pi_1(X,x_0)$ est un groupe par rapport à la multiplication
$$[\gamma_1]\cdot[\gamma_2] := [\gamma_1 * \gamma_2]. \tag{$*$}$$

On va prouver ce théorème en plusieurs étapes.

Étape 1. Soit γ un lacet et $\rho\colon[0,1]\to[0,1]$ une application continue tq $\rho(0)=0$ et $\rho(1)=1$. Alors, $[\gamma\circ\rho]=[\gamma]$.

En effet, $h(t,s)=\gamma\big((1-s)t+s\rho(t)\big)$ est une homotopie.

Étape 2. Le produit $(*)$ est bien défini et associatif.

On a déjà démontré que l'application $\pi_1(X,x_0)\times\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,x_0)$ donnée par $(*)$ est bien défini. Pour démontrer l'associativité, on observe d'abord que
$$(a*\beta)*\gamma(t)=\begin{cases}\alpha(4t) & \text{si } t\in[0,1/4],\\ \beta(4t-1) & \text{si } t\in[1/4,1/2],\\ \gamma(2t-1), & \text{si } t\in[1/2,1],\end{cases}$$

et
$$\alpha*(\beta*\gamma)(t)=\begin{cases}\alpha(2t) & \text{si } t\in[0,1/2],\\ \beta(4t-2) & \text{si } t\in[1/2,3/4],\\ \gamma(4t-3), & \text{si } t\in[3/4,1].\end{cases}$$
On peut vérifier que
$$(a*\beta)*\gamma=\big((a*\beta)*\gamma\big)\circ\rho,$$
ou
$$\rho(t)=\begin{cases}t/2, & \text{si } t\in[0,1/2],\\ t-1/4, & \text{si } t\in[1/2,3/4],\\ 2t-1, & \text{si } t\in[3/4,1].\end{cases}$$
Donc,
$$\begin{aligned}\big([\alpha][\beta]\big)[\gamma]&=[\alpha*\beta][\gamma]=[(\alpha*\beta)*\gamma]=[\alpha*(\beta*\gamma)]\\ &=[\alpha][\beta*\gamma]=[\alpha]\big([\beta][\gamma]\big).\end{aligned}$$

Étape 3. Il existe un élément neutre dans $\pi_1(X, x_0)$ par rapport au produit $(*)$.

Soit x_0 le lacet constant, càd l'application constante $I \to X_0$, $t \mapsto x_0$. Pour un lacet γ, on a

$$(\gamma * x_0)(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2], \\ x_0 & \text{si } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Si on définit ρ par

$$\rho(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } t \in [0, 1/2], \\ 1 & \text{si } t \in [1/2, 1], \end{cases}$$

on a évidemment que $\gamma \circ \rho = \gamma * x_0$. Ainsi,

$$[\gamma] = [\gamma * x_0] = [\gamma][x_0].$$

De la même manière, on obtient $[x_0][\gamma] = [\gamma]$. Par conséquent, $[x_0]$ est l'élément neutre dans $\pi_1(X, x_0)$.

Étape 4. Nous prouvons l'existence d'un inverse.

Pour un lacet γ, on définit

$$\bar{\gamma}(t) := \gamma(1 - t).$$

On va prouver que $\gamma * \bar{\gamma} \simeq x_0 \simeq \bar{\gamma} * \gamma$. En effet, considérons

$$h(t, s) := \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \in [0, s/2], \\ \gamma(s) & \text{si } t \in [s/2, 1 - s/2], \\ \gamma(2 - 2t) & \text{si } t \in [1 - s/2, 1]. \end{cases}$$

Puisque $h(t, 0) = x_0$ et $h(t, 1) = \gamma * \bar{\gamma}(t)$, on obtient que $\gamma * \bar{\gamma} \simeq x_0$. De la même manière, on a $\bar{\gamma} * \gamma \simeq x_0$. Ainsi,

$$[\gamma]^{-1} = [\bar{\gamma}] \in \pi_1(X, x_0)$$

est l'élément inverse de $[\gamma]$.

En résumé, les étapes 1 – 4 montrent que $\pi_1(X, x_0)$ est un groupe.

Proposition

Si $X \subset \mathbb{R}^n$ est convexe, alors $\pi_1(X, x_0) \cong \{1\}$ pour tout $x_0 \in X$.

Proposition

Si X est connexe par arcs, alors $\pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(X, x_1)$ sont isomorphes pour tous $x_0, x_1 \in X$.

On peut trouver une démonstration dans *Gamelin, Greene. Introduction to topology, Theorem 3.3.*

Si X est connexe par arcs, on note par $\pi_1(X)$ la classe d'isomorphisme du groupe $\pi_1(X, x_0)$. Parfois, on dit que $\pi_1(X)$ est le groupe fondamental de X même si ce n'est pas tout à fait correct.

Homomorphismes induits

Soit $f : X \to Y$ une application continue tq $f(x_0) = y_0 \in Y$. Définissons

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0) \qquad \text{par} \qquad f_*[\gamma] = [f \circ \gamma].$$

Théorème

L'application f_* est bien définie. En fait, f_* est un homomorphisme de groupes. De plus, si $g : Y \to Z$ est une autre application continue, on a

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

Démonstration.

Si h et une homotopie entre γ_0 at γ_1, alors $f \circ h$ est une homotopie entre $f \circ \gamma_0$ et $f \circ \gamma_1$. Par conséquent, f_* est bien défini.

Si γ et β sont deux lacets, on a

$$f \circ (\gamma * \beta)(t) = \begin{cases} f \circ \gamma(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ f \circ \beta(2t - 1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases} = (f \circ \gamma) * (f \circ \beta)\ (t).$$

□

Démonstration (suite).

Par conséquent,

$$f_*\big([\gamma][\beta]\big) = \big(f_*[\gamma]\big)\big(f_*[\beta]\big),$$

càd que f_* est un homomorphisme de groupes.

La propriété $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ découle immédiatement de la définition de f_*. □

Corollaire

Si f est un homéomorphisme, alors $f_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1\big(Y,\ f(x_0)\big)$ est un isomorphisme.

Démonstration.

Si f est un homéomorphisme, alors $\exists g: Y \to X$ tq $f \circ g = id_Y$ et $g \circ f = id_X$ (bien sûr, $g = f^{-1}$). En utilisant le théorème précédent, on obtient

$$f_* \circ g_* = (id_Y)_* = id: \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(Y, y_0) \quad \text{avec} \quad y_0 = f(x_0) \qquad \text{et}$$

$$g_* \circ f_* = id: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0).$$

Ainsi, f_* est un isomorphisme. □

Revêtements

Définition

Soient X et Y deux espaces topologiques. Une application surjective et continue $p: Y \to X$ s'appelle un revêtement, si $\forall x \in X$ il existe un voisinage U de x tq

$$f^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in A} V_\alpha$$

et $\forall \alpha \in A$ on a que $f|_{V_\alpha}: V_\alpha \to U$ est un homéomorphisme.

Notons que $\forall x \in X$ le sous-espace $p^{-1}(\{x\}) \subset Y$ est un espace discret.

Exemple (Revêtement trivial)

Si F est un espace discret, pour tout espace topologique X la projection $p: Y = X \times F \to X, \quad p(x, f) = x$, est un revêtement.

Exemple (Revêtement universel du cercle)

L'hélice $H \subset \mathbb{R}^3$ est l'image d'application

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad h(t) = \big(\cos 2\pi t,\ \sin 2\pi t,\ t\big).$$

Notons que H est homéomorphe à $\mathbb{R}$ et, en fait, h est un homéomorphisme (comme l'application $\mathbb{R} \to H$).

Exemple (suite)

Si $\Pi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ est la projection standard, càd $\Pi(x,y,z) = (x,y)$, on obtient par restriction une application continue $\Pi|_H : H \to S^1$. En identifiant H avec $\mathbb{R}$, on obtient

$$p = \Pi \circ h : \mathbb{R} \to S^1, \qquad p(t) = \big(\cos 2\pi t,\ \sin 2\pi t\big).$$

Pour démontrer que p est un revêtement, on observe que

$$S^1 = \big(S^1 \setminus \{(1,0)\}\big) \cup \big(S^1 \setminus \{(-1,0)\}\big) =: U_+ \cup U_-.$$

Puisque $p^{-1}(1,0) = \mathbb{Z}$, on a

$$p^{-1}(U_+) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} (n,\ n+1)$$

et $p : (n, n+1) \to U_+$ est un homéomorphisme pour tout $n \in \mathbb{Z}$. De la même manière, on a

$$p^{-1}(U_-) = \bigsqcup_{m \in \mathbb{Z}} (m - 1/2,\ m + 1/2)$$

et $p : (m - 1/2,\ m + 1/2) \to U_-$ est un homéomorphisme pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Ainsi, p est un revêtement.

Exercice

Prouver que les applications suivantes sont revêtements :

- $p : S^1 \to S^1, p(z) = z^2$. Ici, on considère S^1 comme un sous-ensemble de $\mathbb{C}$. Plus généralement, $p_n : S^1 \to S^1,\ p_n(z) = z^n$, est un revêtement pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
- $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T} = S^1 \times S^1, \quad p(s,t) = \big(e^{2\pi i s},\ e^{2\pi i t}\big)$.
- $p : S^2 \to \mathbb{RP}^2, \quad p(x) = [x]$ (la projection canonique).

Exercice

Supposons qu'un groupe (discret) G opère sur un espace topologique Y dans la manière que les hypothèses du théorème sur le sujet que l'espace quotient $X := Y/G$ est Hausdorff sont satisfaites. Prouver que la projection canonique $\pi : Y \to X$ est un revêtement. En fait, tous les exemples ci-dessus peuvent être obtenus de cette manière (en choisissant Y et G de façon appropriée).

Relèvements d'une application

Soit $f\colon Z \to X$ une application continue quelconque.

Définition

On dit qu'une application $\tilde{f}: Z \to Y$ est un relèvement de f, si $p \circ \tilde{f} = f$.

On représente cette situation par le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

et on dit que ce diagramme est commutatif.

Exercice

Démontrer que tout relèvement d'une application continue est lui-même continue.

Exemple

Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^2$ la projection canonique (qui n'est pas un revêtement ! (Pourquoi ?)), càd que $f(x)$ est la droite passant par 0 et x. L'application

$$\tilde{f}: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to S^2, \qquad \tilde{f}(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

est un relèvement de f, où $p: S^2 \to \mathbb{RP}^2$ est la projection canonique.

Lemme

Soit $p: Y \to X$ un revêtement et $f: Z \to X$ une application continue quelconque, où Z est connexe. Si $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ sont deux relèvements de f tq $\tilde{f}_1(z_0) = \tilde{f}_2(z_0)$ pour un point $z_0 \in Z$, alors $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$, càd que $\tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)$ pour tout $z \in Z$.

Démonstration.

Soient

$$S := \left\{z \in Z \mid \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)\right\} \qquad \text{et} \qquad T := \left\{z \in Z \mid \tilde{f}_1(z) \neq \tilde{f}_2(z)\right\}.$$

On va démontrer que S est ouvert. Pour tout $z \in S$ soit $U \subset X$ un voisinage de $f(y)$ comme dans la définition d'un revêtement. Soit $V = V_\alpha \subset p^{-1}(U)$ tq $\tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z) \in V$. □

Démonstration (suite).

Puisque $f, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ sont continues, il existe un voisinage $W \subset Z$ de z tq

$$f(W) \subset U, \qquad \tilde{f}_1(W) \subset V \qquad \tilde{f}_2(W) \subset V.$$

Puisque $p : V \to U$ est un homéomorphisme et $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ sont des relèvements, on a $\tilde{f}_1|_W = \left(p|_V\right)^{-1} \circ f|_W = \tilde{f}_2|_W$. Alors, $W \subset S$ et, donc, S est ouvert.

Maintenant, on va démontrer que T est ouvert. Choisissons donc un $z \in T$. Comme dans le cas précédent, il existe $V_1 = V_{\alpha_1}$ et $V_2 = V_{\alpha_2}$ tq $\tilde{f}_j(z) \in V_j$. Si $V_1 = V_2 =: V$, l'argument ci-dessus montre que

$$\tilde{f}_1(z) = \left(p|_V\right)^{-1} \circ f|_W = \tilde{f}_2(z),$$

ce qui est impossible parce que $z \in T$. Ainsi, V_1 et V_2 sont disjoints. Or, par la continuité de $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$, il existe un voisinage W de z tq

$$\tilde{f}_1(W) \subset V_1 \quad \text{et} \quad \tilde{f}_2(W) \subset V_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{f}_1 \neq \tilde{f}_2 \quad \text{nulle part sur } W.$$

Cela montre que T est ouvert.

Puisque $S \neq \varnothing$ et Z est connexe, alors $T = \varnothing \Leftrightarrow Z = S$. □

Théorème

Soit $p : Y \to X$ en revêtement, $x_0 \in X$. Pour tout $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ et pour tout chemin $\gamma : I = [0,1] \to X$ tq $\gamma(0) = x_0$ il existe un seul relèvement $\tilde{\gamma} : I \to Y$ tq $\tilde{\gamma}(0) = y_0$.

Démonstration.

L'unicité découle du lemme précédent parce que I est connexe.

Pour tout $x \in X$ on peut trouver un voisinage U_x de x comme dans la définition d'un revêtement, càd que $p^{-1}(U_x) = \bigsqcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ et $p : V_\alpha \to U$ est un homéomorphisme.
La collection

$$\left\{\gamma^{-1}(U_x) \mid x \in X\right\}$$

est un recouvrement ouvert de I. Puisque I est un espace métrique, par le lemme A du cours précédent, il existe une subdivision

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1 \qquad \text{tq} \qquad \gamma\big([t_k, t_{k+1}]\big) \subset U_k = U_{\alpha_k}$$

pour tout $k < n$. □

Démonstration (suite).

On va construire un relèvement récursivement. Ainsi, tout d'abord $\gamma\big([t_0, t_1]\big) \subset U_0$. Puisque $x_0 = \gamma(0) \in U_0$ et $p^{-1}(U_0) = \bigsqcup_j V_{0j} \ni y_0$, il existe j_0 tq $y_0 \in V_{0j_0}$. En utilisant que $p|_{V_{0j_0}} : V_{0j_0} \to U_0$ est un homéomorphisme, on peut définir

$$\tilde{\gamma} : [t_0, t_1] \to Y \qquad \text{par} \qquad \tilde{\gamma} = \left(p|_{V_{0j_0}}\right)^{-1} \circ \gamma.$$

Supposons qu'on a déjà construit le relèvement $\tilde{\gamma}$ sur $[0, t_k]$. Nous savons que $\gamma\big([t_k, t_{k+1}]\big) \subset U_k$. Puisque $\pi^{-1}(U_k) = \bigsqcup_j V_{kj}$ et $\tilde{\gamma}(t_k) \in p^{-1}(U_k)$, $\exists j_k$ tq $\tilde{\gamma}(t_k) \in V_{kj_k}$. Donc, on peut définir un prolongement de $\tilde{\gamma}$ sur $[t_k, t_{k+1}]$ par

$$\tilde{\gamma} = \left(p|_{V_{kj_k}}\right)^{-1} \circ \gamma.$$

Après un nombre fini d'étapes, nous obtenons un relèvement de γ qui est défini sur $[0, 1]$. □

Théorème

Soit $p : Y \to X$ un revêtement et $h : I \times I \to X$ une application continue quelconque. Pour tout $y_0 \in Y$ tq $p(y_0) = h(0,0)$ il existe un seul relèvement $\tilde{h} : I \times I \to Y$ tq $\tilde{h}(0,0) = y_0$.

On peut obtenir une démonstration de la même manière comme la démonstration du théorème précédent. Pour des détails, voyez Gamelin, Greene. Introduction to topology, Theorem 5.3.

Définition

Un espace topologique X est dit simplement connexe, si X est connexe par arcs et $\pi_1(X) = \{1\}$.

Par exemple, $\mathbb{R}^n$ est simplement connexe. On va démontrer que S^1 n'est pas simplement connexe.

Théorème

La sphère S^n est simplement connexe lorsque $n \geq 2$.

Démonstration.

Étape 1. Si γ est un lacet sur S^n basé en pôle sud S, alors γ est homotope à un lacet γ_1 tq $\operatorname{Im}\gamma_1 \not\ni N$, où N est le pôle nord.

Considérons le recouvrement de S^n suivant :

$$\mathcal{U} := \{U_N, U_P\} \qquad \text{où} \qquad U_N := S^n \setminus \{P\} \text{ et } U_P := S^2 \setminus \{N\}.$$

Notons que $\{\gamma^{-1}(U_N), \gamma^{-1}(U_P)\}$ est un recouvrement ouvert de $[0,1]$. Par un argument utilisé dans la preuve du théorème sur les relèvements de chemins, il existe une subdivision

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_p = 1$$

tq $\gamma\big([t_k, t_{k+1}]\big)$ est contenu dans U_N ou U_P. De plus, on peut supposer que $\gamma(t_k) \neq N$ pour tout k. □

Démonstration (suite).

On construit γ_1 en remplaçant γ sur chaque sous-intervalle. Si $\gamma\big([t_k, t_{k+1}]\big) \subset U_P$, on ne fait rien parce que $N \notin U_P$. Supposons donc que $\gamma\big([t_k, t_{k+1}]\big) \subset U_N$. Puisque $U_N \setminus \{N\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $n \geq 2$, $U_N \setminus \{N\}$ est connexe par arcs. Donc, pour les deux points $p_0 = \gamma(t_k)$ et $p_1 := \gamma(t_{k+1})$, on peut trouver un chemin $\hat{\gamma} : [t_k, t_{k+1}] \to U_N \setminus \{N\}$ tq

$$\hat{\gamma}(t_k) = p_0 = \gamma(t_k) \qquad \text{et} \qquad \hat{\gamma}(t_{k+1}) = p_1 = \gamma(t_{k+1}).$$

Puisque U_N est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, si on considère $\hat{\gamma}$ comme un chemin sur U_N, $\hat{\gamma}$ et $\gamma|_{[t_k, t_{k+1}]}$ sont homotopes relativement à $\{t_k, t_{k+1}\}$. Ainsi, en remplacent $\gamma|_{[t_k, t_{k+1}]}$ par $\hat{\gamma}$, on obtient un chemin sur S^n qui est homotope à γ et dont image sur $[t_k, t_{k+1}]$ ne contient pas le pôle nord. Après un nombre fini de ces remplacements élémentaires, on obtient γ_1.

Étape 2. Tout lacet sur S^n dont image ne contient pas le pôle nord est homotope à lacet constant P.

La démonstration est à vous comme exercice. □

Soit $p : Y \to X$ un revêtement. Supposons que $\gamma \in \Omega(X, x_0)$ et $y_0 \in p^{-1}(x_0)$. On obtient l'application

$$\Phi = \Phi_{y_0} : \Omega(X, x_0) \to p^{-1}(x_0), \qquad \Phi(\gamma) = \tilde{\gamma}(1),$$

où $\tilde{\gamma}$ est le relèvement tq $\tilde{\gamma}(0) = y_0$.

Remarque

Même si γ est un lacet, $\tilde{\gamma}$ n'a pas besoin d'être un lacet, càd que $\tilde{\gamma}(1) \neq y_0$ en général.

Proposition

$\Phi(\gamma)$ dépend seulement de $[\gamma]$. En particulière, on a l'application

$$\Phi : \pi_1(X, x_0) \to p^{-1}(x_0).$$

Si Y est simplement connexe, cette application est bijective.

Démonstration.

Soit h une homotopie entre $\gamma_0 = \gamma$ et γ_1. Par le théorème ci-dessus, il existe $\tilde{h} : I \times I \to Y$ tq $\tilde{h}(0,0) = y_0$. Puisque l'application

$$I \to X, \qquad s \mapsto h(0,s) = x_0$$

est constante, $\tilde{h}(0,s) \in p^{-1}(x_0)$. Mais $p^{-1}(x_0)$ est un espace discret, donc l'application $s \to \tilde{h}(0,s)$ est aussi constante, car continue. Ainsi, $\tilde{h}(0,s) = y_0$ pour tout $s \in I$.

De la même manière, on obtient que l'application

$$I \to \pi^{-1}(x_0), \qquad s \mapsto \tilde{h}(1,s)$$

est aussi constante.

Maintenant, on observe que le chemin $t \mapsto \tilde{h}(t,0)$ est le seul relèvement de $t \mapsto h(t,0) = \gamma_0(t)$ avec le début en y_0. De la même manière, $t \mapsto \tilde{h}(t,1)$ est le seul relèvement de $t \mapsto h(t,1) = \gamma_1(t)$ avec le début en $\tilde{h}(0,1) = y_0$. Mais on a déjà démontré que

$$\tilde{h}(1,0) = \tilde{h}(1,1) \qquad \Leftrightarrow \qquad \Phi(\gamma_0) = \Phi(\gamma_1).$$

Ainsi, Φ est bien définie comme l'application $\pi_1(X, x_0) \to p^{-1}(x_0)$. $\square$

Démonstration (suite).

Supposons maintenant que Y est simplement connexe. Puisque Y est connexe par arcs, $\forall y \in p^{-1}(x_0)$ il existe un chemin β joignant y_0 et y. Par conséquent, $\gamma := p \circ \beta \in \Omega(X, x_0)$ et β est le seul relèvement de γ avec le début en y_0. Ainsi, $\Phi(\gamma) = y$ qui montre que Φ est surjective.

On va démontrer que Φ est injective. Supposons donc que $\Phi(\gamma_0) = \Phi(\gamma_1)$ pour certaines $\gamma_0, \gamma_1 \in \Omega(X, x_0)$. Soient $\tilde{\gamma}_j$ le relèvement de γ_j tq $\tilde{\gamma}_j(0) = y_0$. Par l'hypothèse, $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1)$ et donc $\tilde{\gamma}_0 * \overline{\tilde{\gamma}}_1 \in \Omega(Y, y_0)$. Puisque $\pi_1(Y, y_0) = \{1\}$, il existe une homotopie h tq

$$h(t,0) = \tilde{\gamma}_0 * \overline{\tilde{\gamma}}_1(t), \qquad h(t,1) = y_0$$
$$h(0,s) = y_0, \qquad h(1,s) = y_0.$$

Par conséquent, $\pi \circ h$ est une homotopie entre $\gamma_0 * \tilde{\gamma}_1$ et x_0. Donc,

$$[\gamma_0][\gamma_1]^{-1} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad [\gamma_0] = [\gamma_1].$$

□

Corollaire

$\pi_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}_2$.

Démonstration.

Puisque S^2 est un revêtement du plan projectif simplement connexe, la proposition précédente montre, que $\pi_1(\mathbb{RP}^2)$ contient deux éléments. Or, il existe un seul groupe avec deux éléments. □

Corollaire

$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Démonstration.

Choisissons $x_0 = (0,1)$ comme un point de base. Soit $p : \mathbb{R} \to S^1$ le revêtement universel de cercle. Puisque $\mathbb{R}$ est simplement connexe et $p^{-1}(x_0) = \mathbb{Z}$, on obtient une bijection

$$\Phi : \pi_1(S^1, x_0) \to \mathbb{Z},$$

où on choisit $y_0 = 0$ comme le point de base dans $\mathbb{R}$. □

Démonstration (suite).

Soient $\beta, \gamma \in \Omega(S^1, x_0)$. Si $\tilde{\beta}$ et $\tilde{\gamma}$ sont les relèvements tq $\tilde{\beta}(0) = 0 = \tilde{\gamma}(0)$, le chemin

$$t \mapsto \begin{cases} \tilde{\beta}(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2], \\ \tilde{\beta}(1) + \tilde{\gamma}(2t-1) & \text{si } t \in [1/2, 1], \end{cases}$$

est le relèvement de $\beta * \gamma$ avec le début en 0 et la fin en $\tilde{\beta}(1) + \tilde{\gamma}(1)$, càd

$$\Phi\big([\beta][\gamma]\big) = \Phi([\beta]) + \Phi([\gamma]).$$

Ainsi, Φ est un morphisme de groupes. □

Corollaire

$\pi_1(\mathbb{T}) \cong \mathbb{Z}^2$, où $\mathbb{T}$ est le tore.

Démonstration.

Cela découle par exemple du fait suivant (démontrer comme exercice !) :

$$\pi_1\big(X \times Y, (x_0, y_0)\big) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

Alternativement, nous avons vu qu'il y a un revêtement $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}$. De la même manière comme si-dessus, on peut démontrer que $\Phi : \pi_1(\mathbb{T}) \to p^{-1}(x_0) \cong \mathbb{Z}^2$ est un morphisme de groupes. □

Théorème

La sphere, le plan projectif et le tore sont non-homéomorphes par paire.

Remarque

De la même manière, on peut aussi prouver que la bouteille de Klein n'est isomorphe à aucun des espaces suivants : S^2, $\mathbb{RP}^2$ et $\mathbb{T}$.

Théorème (Brouwer)

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ le disque fermé. Toute application continue $f : D \to D$ admet au moins un point fixe.

Démonstration.

Supposons qu'il existe une application continue $f : D \to D$ sans points fixes. Donc, on peut considérer l'application $r : D \to S^1$ définie par la règle : $r(p)$ est le point d'intersection de la demi-droite $[f(p), p)$ avec S^1. Cette application est continue (exercice !) et satisfaite la propriété

$$r \circ \iota = id_{S^1}, \qquad \text{où} \quad \iota : S^1 \to D, \quad \iota(x, y) = (x, y).$$

Par conséquent,

$$r_* \circ \iota_* = id_* = id \colon \pi_1(S^1) \to \pi_1(S^1).$$

Or, cela est impossible, parce que $\pi_1(D) = \{1\}$ et, donc, $\mathrm{Im}(r_*) = \{1\}$. □

Remarque

Le théorème de Brouwer généralise le résultat bien connu du lecteur : pour toute fonction $f : [0, 1] \to [0, 1]$ il existe un point x tq $f(x) = x$. Le théorème de Brouwer est également valable pour la boule fermée dans $\mathbb{R}^n$, mais notre démonstration ne se généralise pas facilement parce que $\pi_1(S^n) = \{1\}$ lorsque $n \geq 2$.