Topologie

Andriy Haydys

Questions organisationnelles

Note finale = 80% pour l'examen écrit + 20% pour des devoirs ;

Les devoirs : 6 (2+2+2) exercices toutes les trois semaines ;
Chaque troisième semaine : on choisira 1 de ces 6 exercices au hasard et vous devrez écrire une solution en présence.

MATH–F211 $\longrightarrow$ Differential geometry I

$\longrightarrow$ Differential geometry II $\longrightarrow$ $\begin{cases} \text{Géométrie riemannienne} \\ \text{Riemann surfaces} \\ \text{Géométrie symplectique} \\ \text{Global analysis} \\ \text{Algebraic topology} \end{cases}$

Motivation : La continuité

$f = f(x)$ est continue si un petit changement de x entraîne un petit changement de $f(x)$. Ainsi,

$$y \approx x \qquad \Longrightarrow \qquad f(y) \approx f(x).$$

Par exemple, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ est continue mais $f(x) = \operatorname{sign} x$ est discontinue.

L'objectif du cours est de trouver un langage efficace pour discuter la notion de la continuité.

La continuité en physique

En physique, presque (?) toutes les quantités ne sont connues qu'approximativement.

Une question fondamentale : Supposons qu'une application f décrive un modèle physique. Si y est une valeur approximative de x, est-ce que $f(y)$ est une valeur approximative de $f(x)$? Autrement dit, est-ce que f est continue ?

Exemple

- La force d'attraction entre deux planètes dépend continûment de leurs masses : $F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$;
- La période de petites oscillations du pendule $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ est une fonction continue de l.

Pour les applications $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, le slogan

$$y \approx x \qquad \Longrightarrow \qquad f(y) \approx f(x)$$

peut être précisé comme suit :

Définition

Une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est dite *continue* si $\forall x \in \mathbb{R}^n\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$ tq

$$\|y - x\| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|f(y) - f(x)\| < \varepsilon$$

ou $\|h\| = \left(\sum_{i=1}^n h_i^2\right)^{1/2}$, $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$.

Q : Pourquoi les fonctions continues sont-elles importantes ?

Parce qu'elles ont des propriétés importantes, e.g. :

- Si $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, f est bornée et $\exists x_0 \in [a, b]$ et $\exists x_1 \in [a, b]$ tq $\forall x \in [a, b]$
$$f(x_0) \le f(x) \le f(x_1).$$
- (Théorème des valeurs intermédiaires) Si $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, l'équation
$$f(x) = y, \qquad y \in \mathbb{R}$$
a une solution ssi $f(x_0) \le y \le f(x_1)$.

Défi : le cas $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ne suffit pas pour les applications.

Exemple (Le pendule : approche non rigoureuse)

Les oscillations d'un pendule sont décrites par l'équation $\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin\theta$, ou $\omega^2 = \frac{g}{l}$. Si θ est petit, $\sin\theta \approx \theta$, alors l'équation approximative devient

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$$

qui peut être résolue de manière explicite :

$$\theta(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t. \tag{*}$$

On peut déterminer les constantes a et b à partir des conditions initiales, e.g. : $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0 \implies a = \theta_0$ et $b = 0$, ainsi $\theta(t) = \theta_0\cos\omega t$.

NB. $\theta\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \theta(t) \implies T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Alors, (*) décrit les oscillations d'un pendule approximativement.

Mais pourquoi ? Que veut-on dire par « deux fonctions sont proches » ?

En résumé, on a besoin d'une notion de continuité pour les applications définies sur des ensembles plus généraux que $\mathbb{R}^n$.

Pour trouver une forme plus générale, retournons au cas $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
Désignons $B_r(x) := \left\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < r\right\}$ où $r > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Définition

On dit que $U \subset \mathbb{R}^n$ est *ouvert* si $\forall x \in U \quad \exists r > 0 \quad \text{tq} \quad B_r(x) \subset U$.

Exemple

$B_r(x)$ est ouvert $\forall x \in \mathbb{R}^n$ et $\forall r > 0$.

$\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ désigne la collection de tous les ouverts de $\mathbb{R}^n$, alors

$$U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n} \iff \mathbb{R}^n \supset U \text{ est ouvert.}$$

Proposition

(T1) $\mathbb{R}^n, \varnothing \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$.

(T2) *Si* $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$, *alors* $U_1 \cap \dots \cap U_k \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$.

(T3) *Si* $\{U_i : i \in I\}$ *est une collection quelconque d'éléments de* $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$, *alors* $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$.

Démonstration.

(T1) Évident.

(T2) Soit $x \in U_1 \cap \dots \cap U_k$, alors $x \in U_j \quad \forall j \in \{1, \dots, k\}$.
U_j est ouvert $\implies \exists r_j > 0$ tq $B_{r_j}(x) \subset U_j$.
Posons $r := \min\{r_1, \dots, r_k\} > 0$. Donc $B_r(x) \subset U_j \; \forall j \implies$
$B_r(x) \subset U_1 \cap \dots \cap U_k$.

(T3) Soit $x \in \bigcup_{i \in I} U_i \implies \exists i \in I$ tq $x \in U_i$;
U_i est ouvert $\implies \exists r > 0$ tq $B_r(x) \subset U_i \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.

□

Définition

Pour un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^m$ quelconque et pour une application $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ quelconque, l'image inverse est définie par

$$f^{-1}(A) := \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid f(y) \in A \right\}.$$

Proposition

$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *est continue* $\iff \forall U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n} \qquad f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$.

Démonstration.

$(\Longleftarrow)$: Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$; $z := f(x)$.

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(z) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^m} \quad &\implies \quad f^{-1}\big(B_\varepsilon(z)\big) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n} \\ &\implies \quad \exists \delta > 0 \text{ tq } B_\delta(x) \subset f^{-1}\big(B_\varepsilon(z)\big) \\ &\implies \quad \text{Si } y \in B_\delta(x), \text{ alors } f(y) \in B_\varepsilon(z) \\ &\implies \quad \text{Si } \|y - x\| < \delta, \text{ alors } \|f(y) - f(x)\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, f est continue. □

Proposition

$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *est continue* $\iff \forall U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n} \qquad f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}.$

Démonstration.

$(\implies)$: Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}
f \text{ est continue} \quad &\implies \quad \|f(y) - f(x)\| < \varepsilon \text{ lorsque } \|y - x\| < \delta \\
&\implies \quad f(y) \in B_\varepsilon\big(f(x)\big) \text{ lorsque } y \in B_\delta(x) \\
&\implies \quad y \in f^{-1}\big(B_\varepsilon(x)\big) \text{ lorsque } y \in B_\delta(x) \\
&\implies \quad B_\delta(x) \subset f^{-1}\big(B_\varepsilon(x)\big).
\end{aligned}$$

Alors, $x \in f^{-1}(U) \iff f(x) \in U$; $U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^m} \implies \exists \varepsilon > 0$ tq $B_\varepsilon\big(f(x)\big) \subset U$
$\implies B_\delta(x) \subset f^{-1}(U)$ et donc $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$. $\square$

En résume, on peut définir la continuité uniquement en termes d'ensembles ouverts.

Topologie

Soit X un ensemble non-vide quelconque.

Définition

Une collection $\mathcal{T}_X$ de sous-ensembles de X est *une topologie sur X* si

(T1) $X, \varnothing \in \mathcal{T}_X$.

(T2) Si $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{T}_X$, alors $U_1 \cap \cdots \cap U_k \in \mathcal{T}_X$.

(T3) Si $\{U_i : i \in I\}$ est une collection quelconque d'éléments de $\mathcal{T}_X$, alors $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_X$.

Le couple $(X, \mathcal{T}_X)$ est *un espace topologique*. Les éléments $U \in \mathcal{T}_X$ s'appelent *les ouverts* de la topologie.

Exemple

0) X quelconque, $\mathcal{T}_X := \{\varnothing, X\}$; La topologie *grossière*.
1) X quelconque, $\mathcal{T}_X := \{U \subset X\}$ (tous sous-ensembles) ; La topologie *discrète*.
2) $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$; La topologie standard de $\mathbb{R}^n$.

Remarque

- Pour démontrer (T2), il suffit de montrer que
$$U_1, U_2 \in \mathcal{T}_X \quad \Longrightarrow \quad U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_X.$$
- Pour un ensemble X quelconque et sous-ensembles U_i, $i \in I$, on a
$$X \setminus \bigcap_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus U_i) \qquad \text{et} \qquad X \setminus \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i).$$

Proposition

Pour X quelconque, $\mathcal{T}_X := \{U \subset X \mid X \setminus U \text{ est fini ou } U = \varnothing\}$ est une topologie sur X. Elle s'appelle la topologie cofinie.

Démonstration.

(T2) $X \setminus (U_1 \cap U_2) = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)$ est fini $\Longrightarrow$ $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_X$.

(T3) $X \setminus \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} X \setminus U_i$ est fini $\Longrightarrow$ $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_X$.

$\square$

L'ESPACE TOPOLOGIQUE N'EST PAS SEULEMENT UN ENSEMBLE !

Ainsi, chaque ensemble X admet au moins 3 topologies différentes (si X est infini) : grossière, cofinie et discrète.

- grossière ≠ cofinie : $X \setminus \{x_0\} \in \mathcal{T}_X^{cofin}$ et $X \setminus \{x_0\} \notin \mathcal{T}_X^{gros}$.
- grossière ≠ discrète : $\{x_0\} \in \mathcal{T}_X^{discr}$ et $\{x_0\} \notin \mathcal{T}_X^{gros}$.
- cofinie ≠ discrète : $\{x_0\} \in \mathcal{T}_X^{discr}$ et $\{x_0\} \notin \mathcal{T}_X^{cofin}$.

Attention

On dit souvent que X est un espace topologique si la topologie est connue. Dans ce cas, il faut bien comprendre de quelle topologie il s'agit !

Définition

Soit $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ une application entre deux espaces topologiques. Elle est dite *continue* ou $(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y)$-*continue* si pour tout $U \in \mathcal{T}_Y$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$.

Attention

La notion de continuité dépend des topologies choisies.

Exemple

0) $id\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (X, \mathcal{T}_X)$ est toujours continue.
1) $f\colon (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}) \to (\mathbb{R}^m, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^m})$ est continue ssi f est continue dans le sens de l'analyse (ici, $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ est la topologie standard de $\mathbb{R}^n$!).
2) $f\colon (X, \mathcal{T}_X^{gros}) \to (\mathbb{R}^m, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^m})$ est continue ssi f est constante : si $z \in \operatorname{im} f$, $f^{-1}(B_\varepsilon(z)) \neq \varnothing$, alors $f^{-1}(B_\varepsilon(z)) = X \Leftrightarrow f(X) \subset B_\varepsilon(z)$. Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, alors $f(X) \subset \{z\}$.
   Ainsi, $f\colon (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}^{gros}) \to (\mathbb{R}^m, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^m})$ est continue $\implies$ f est constant !

Exemple (suite)

3) Chaque application $f\colon (X, \mathcal{T}_X^{discr}) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ est continue parce que chaque sous-ensemble de X est ouvert (dans $\mathcal{T}_X^{discr}$!).
4) Une fonction constante est toujours continue. Par contre, la fonction
$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$
   n'est pas continue parce que $\chi^{-1}\big((\tfrac{1}{2}, 2)\big) = [0, +\infty)$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$ (la topologie standard).
5) Si X contient au moins 2 points, id: $(X, \mathcal{T}^{gros}) \to (X, \mathcal{T}^{discr})$ n'est pas continue parce que $id^{-1}\big(\{x_0\}\big) = \{x_0\}$ mais $\{x_0\}$ n'est pas ouvert dans $(X, \mathcal{T}^{gros})$.
   Par contre, id: $(X, \mathcal{T}^{discr}) \to (X, \mathcal{T}^{gros})$ est continue !

Lemme

Soient $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y), (Z, \mathcal{T}_Z)$ des espaces topologiques et $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ des applications continues. Alors la composition $g \circ f: X \to Z$ est aussi continue.

Démonstration.

La démonstration découle du fait suivant : pour toutes les applications $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ et pour tout sous-ensemble $U \subset Z$ on a

$$\big(g \circ f\big)^{-1}(U) = f^{-1}\big(g^{-1}(U)\big).$$

Ainsi, si f, g sont continues et U est ouvert, $g^{-1}(U)$ est ouvert et donc $f^{-1}\big(g^{-1}(U)\big)$ est ouvert aussi. □

Corollaire

$f = (f_1, f_2): X \to \mathbb{R}^2$ est continue ssi $f_1, f_2: X \to \mathbb{R}$ sont continues.

Démonstration.

Supposons que $f: X \to \mathbb{R}^2$ est continue. Puisque $\pi_1, \pi_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$\pi_1(x, y) = x \quad \text{et} \quad \pi_2(x, y) = y$$

sont continues, $\pi_1 \circ f = f_1$ et $\pi_2 \circ f = f_2$ sont continues par le lemme.

Supposons que f_1 et f_2 sont continues. Soit $U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$ et $p = (p_1, p_2) \in U$.
$U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2} \implies \exists r > 0$ tq $B_{2r}(p) \subset U \implies$
$R_p := (p_1 - r, p_1 + r) \times (p_2 - r, p_2 + r) \subset B_{2r}(p)$. Alors,
$f^{-1}(R_p) = f_1^{-1}\big((p_1 - r, p_1 + r)\big) \cap f_2^{-1}\big((p_2 - r, p_2 + r)\big)$ est ouvert comme l'intersection des ouverts et $f^{-1}(R_p) \subset f^{-1}(U)$. Ainsi,

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{p \in U} f^{-1}(R_p)$$

est ouvert comme la réunion des ouverts. □