Rappels

Définition

Une collection $\mathcal{T}_X$ de sous-ensembles de X est *une topologie sur X* si

(T1) $X, \varnothing \in \mathcal{T}_X$.

(T2) Si $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{T}_X$, alors $U_1 \cap \cdots \cap U_k \in \mathcal{T}_X$.

(T3) Si $\{U_i : i \in I\}$ est une collection quelconque d'éléments de $\mathcal{T}_X$, alors $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_X$.

Définition

On dit que $U \subset \mathbb{R}^n$ est *ouvert* si $\forall x \in U \quad \exists r > 0 \quad \text{tq} \quad B_r(x) \subset U$.
$\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ désigne la collection de tous les ouverts de $\mathbb{R}^n$, alors

$$U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n} \iff \mathbb{R}^n \supset U \text{ est ouvert.}$$

Proposition

$\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ est une topologie sur $\mathbb{R}^n$.

Rappels II

Exemple

0) X quelconque, $\mathcal{T}_X := \{\varnothing, X\}$; La topologie *grossière*.
1) X quelconque, $\mathcal{T}_X := \{U \subset X\}$ (tous sous-ensembles) ; La topologie *discrète*.
2) X quelconque, $\mathcal{T}_X^{cofin} := \{U \subset X \mid X \setminus U \text{ est fini ou } U = \varnothing\}$; La topologie *cofinie*.

Définition

Soit $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ une application entre deux espaces topologiques. Elle est dite *continue* ou $(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y)$-*continue* si pour tout $U \in \mathcal{T}_Y$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$.

Lemme

Soient $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y), (Z, \mathcal{T}_Z)$ des espaces topologiques et $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ des applications continues. Alors la composition $g \circ f\colon X \to Z$ est aussi continue.

Corollaire

$f = (f_1, f_2): X \to \mathbb{R}^2$ est continue ssi $f_1, f_2: X \to \mathbb{R}$ sont continues.

Démonstration.

Supposons que $f: X \to \mathbb{R}^2$ est continue. Puisque $\pi_1, \pi_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$\pi_1(x, y) = x \quad \text{et} \quad \pi_2(x, y) = y$$

sont continues, $\pi_1 \circ f = f_1$ et $\pi_2 \circ f = f_2$ sont continues par le lemme.

Supposons que f_1 et f_2 sont continues. Soit $U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$ et $p = (p_1, p_2) \in U$.
$U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2} \implies \exists r > 0$ tq $B_{2r}(p) \subset U \implies$
$R_p := (p_1 - r, p_1 + r) \times (p_2 - r, p_2 + r) \subset B_{2r}(p)$. Alors,
$f^{-1}(R_p) = f_1^{-1}\big((p_1 - r, p_1 + r)\big) \cap f_2^{-1}\big((p_2 - r, p_2 + r)\big)$ est ouvert comme l'intersection des ouverts et $f^{-1}(R_p) \subset f^{-1}(U)$. Ainsi,

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{p \in U} f^{-1}(R_p)$$

est ouvert comme la réunion des ouverts. □

L'espace des fonctions continues

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Désignons

$$C^0(X) := \big\{f: X \to \mathbb{R} \mid f \text{ est continue}\big\}.$$

Lemme

Soient $f, g \in C^0(X)$. Alors les fonctions suivantes sont toutes continues :

1. *$f + g$, définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;*
2. *$f - g$, définie par $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$;*
3. *fg, définie par $(fg)(x) = f(x)g(x)$;*
4. *f/g, définie par $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ si $g(x) \neq 0$ en tout $x \in X$;*
5. *$|f|$, définie par $|f|(x) = |f(x)|$.*

Comme exemple, nous démontrons que $fg \in \mathcal{C}^0(X)$ si $f, g \in \mathcal{C}^0(X)$.

En effet, fg est la composition suivante

$$X \xrightarrow{(f,g)} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mu} \mathbb{R},$$

où μ est définie par $\mu(s,t) = st$. Puisque (f,g) et μ sont continues, fg est continue aussi.

Exercice

Démontrer les affirmations restantes du lemme.

Sous-ensembles fermés

Soit $(X, \mathcal{T}_X)$ un espace topologique.

Définition

Un sous-ensemble $F \subset X$ est dit *fermé* si $X \setminus F$ est ouvert.

Exemple

1) $[0,1] \subset \mathbb{R}$ est fermé.
2) $\{0\} \subset \mathbb{R}^n$ est fermé.
3) $\{x_0\} \subset X$ muni de la topologie grossière n'est pas fermé lorsque X contient au moins 2 points.
4) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ est fermé si $\mathbb{R}$ est muni de la topologie standard. Par contre, $\mathbb{Z}$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ si $\mathbb{R}$ est muni de la topologie cofinie.

Ainsi, être fermé est une propriété de $F \subset X$ et de $\mathcal{T}_X$ et pas seulement de F : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ est toujours fermé, et cependent $\mathbb{Z} \subset (\mathbb{R}, \mathcal{T}^{cofin})$ n'est pas fermé.

Lemme

Soit X un espace topologique.

(F1) $X, \varnothing$ *sont fermés.*

(F2) *Si $F_1, \dots, F_k$ sont fermés, alors $F_1 \cup \cdots \cup F_k$ est fermé.*

(F3) *Si $\{F_i : i \in I\}$ est une collection quelconque de sous-ensembles fermés, alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est fermé.* □

La démonstration découle des égalités suivantes :

$$A \setminus \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I}\left(A \setminus B_i\right) \qquad \text{et} \qquad A \setminus \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I}\left(A \setminus B_i\right).$$

Attention

Un sous-ensemble peut être à la fois ouvert et fermé (par ex $X \subset X$) ou ni ouvert ni fermé (par ex $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$).

Remarque

La collection de tous les sous-ensembles fermés contient la même quantité d'informations que la topologie. On aurait donc pu baser notre définition de topologie sur les ensembles fermés, définir un ouvert comme le complément d'un fermé, etc. Il s'agit simplement d'une convention.

Proposition

Une application $f : X \to Y$ est continue ssi pour tout fermé $F \subset Y$ l'image inverse $f^{-1}(F)$ est un fermé de X.

La preuve découle du fait suivant : pour tout sous-ensemble $A \subset Y$ on a

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A). \tag{*}$$

Exercice

Démontrer (*).

Un voisinage

Définition (Voisinage)

Soit X un espace topologique et $x \in X$. Tout sous-ensemble ouvert $V \subset X$ tq $V \ni x$ s'appelle *un voisinage* de x.

Attention

Parfois on dit que V est un voisinage <u>ouvert</u>.
Une autre convention possible (dominante dans la littérature française) :
Un voisinage de x dans X est un sous-ensemble W de X qui contient un ouvert qui contient x.

Pointes limites

Définition

Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique X. Un point $x \in X$ est un *point limite*, ou *point d'adhérence* de A si pour tout voisinage $U \subset X$ de x, on a

$$(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing.$$

Exemple

1) Les points limites de $A = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ sont $[-1, 1]$.
Plus généralement, les points limites de $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ sont $\bar{B}_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| \leq r\}$.
2) L'ensemble $A = \{0\} \subset \mathbb{R}$ n'a pas de point limite.
3) Le point limite de $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ est $\{0\}$.
4) Les points limites de $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ sont $\mathbb{R}$.
5) Les points limites de $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ muni de la top. cofinie sont $\mathbb{R}$. Cependant, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ muni de la topologie standard n'a pas de point limite.

Définition

Soit $A \subset X$ un sous-ensemble d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. L'adhérence de A dans X est definie par

$$\bar{A} = \text{adh}\,(A) := A \cup \left\{\text{points limites de } A\right\}.$$

Exemple

1) Pour $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$, $\overline{B_r(x)} = \bar{B}_r(x)$.

   ...

5) Pour $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ muni de la topologie cofinie, $\bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$. Cependant, pour $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ muni de la topologie standard, $\bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$.

Lemme

Soient $A, B \subset X$ deux sous-ensembles d'un espace topologique X. Alors

1. *A est fermé dans X ssi $\bar{A} = A$.*
2. *Si $A \subset B$ alors $\bar{A} \subset \bar{B}$.*
3. *$\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.*

Démonstration.

1. Supposons que A est fermé. $\forall x \in X \setminus A =: V$, V est un voisinage tq $\left(V \setminus \{x\}\right) \cap A = \varnothing$, alors $x \notin \bar{A}$ et donc $A = \bar{A}$.
   Supposons que $A = \bar{A}$. $\forall x \in X \setminus \bar{A} = X \setminus A \quad \exists$ un voisinage U_x tq $x \in U_x$ et $\left(U_x \setminus \{x\}\right) \cap A = \varnothing \implies U_x \subset X \setminus A$. Alors, $X \setminus A$ est un ouvert comme la réunion des ouverts : $X \setminus A = \bigcup_{x \in X \setminus A} U_x$.
2. Evident.
3. Il suffit de démontrer que $\bar{\bar{A}} \subset \bar{A}$. Soit x un point limite de $\bar{A}$. Alors, $\forall$ voisinage V de x on a : $\exists y \in V \cap \bar{A}$ et $y \neq x$. Donc, V est un voisinage de y, qui est un point limite de A. Donc, $\left(V \setminus \{y\}\right) \cap A \neq \varnothing \implies x$ est un point limite de A.

$\square$

Proposition

$\bar{A}$ est fermé pour tout $A \subset X$. En fait, $\bar{A}$ est le plus petit fermé qui contient A :

$$\bar{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ est fermé} \\ A \subset F}} F. \tag{*}$$

Démonstration.

Lemme $\implies$ $\bar{A}$ est fermé.

Désignons temporairement par B le membre de droite de (*) et notons que B est fermé.

Si F est fermé et $A \subset F$, $\bar{A} \subset \bar{F} = F$ et alors $\bar{A} \subset B$.

Pour démontrer l'inclusion $B \subset \bar{A}$, on note que $\bar{A}$ est un fermé qui contient A.

□

Espaces métriques

Les espaces métriques constituent une classe d'espaces topologiques.

Définition

Soit M un ensemble non-vide. Une fonction $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ est une *métrique* si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

M1 $d(x, y) \geq 0$ pour tout $x, y \in M$ et $d(x, y) = 0$ ssi $x = y$

M2 $d(x, y) = d(y, x)$ pour tout $x, y \in M$.

M3 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ pour tout $x, y, z \in M$ (*l'inégalité triangulaire*).

Le couple (M, d) est un *espace métrique*.

Proposition (La métrique euclidienne)

$$d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

est bien une métrique sur $\mathbb{R}^n$. En particulier, $d(x, y) = |x - y|$ est une métrique sur $\mathbb{R}$.

Lemma (L'inégalité de Cauchy)

Soient $r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R}$. *Alors*

$$\Big(\sum r_j s_j\Big)^2 \le \Big(\sum r_j^2\Big)\Big(\sum s_j^2\Big). \tag{$*$}$$

Démonstration du lemme.

Dans le cas où $a := \sum r_j^2 = 0$, $(*)$ est évidente. Supposons $a > 0$ et considérons

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum (t r_j + s_j)^2 = t^2 \sum r_j^2 + 2t \sum r_j s_j + \sum s_j^2 \\ &= at^2 + 2bt + c = a\big(t + b/a\big)^2 + c - b^2/a. \end{aligned}$$

Évidemment, $F(t) \ge 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier,

$$F(-b/a) \ge 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b^2 \le ac \quad \Longleftrightarrow \quad (*).$$

□

Proposition (La métrique euclidienne)

$$d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

est bien une métrique sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration.

M1 et M2 sont évidentes. Pour démontrer M3, notons $r_j := x_j - z_j$ et $s_j := z_j - y_j$. Il faut démontrer que

$$\sqrt{\sum (r_j + s_j)^2} \le \sqrt{\sum r_j^2} + \sqrt{\sum s_j^2} \quad \Longleftrightarrow$$

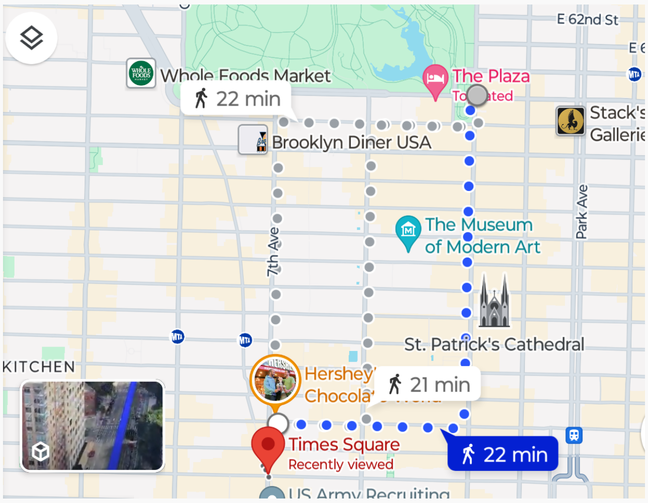
$$\cancel{\sum r_j^2} + 2\sum r_j s_j + \cancel{\sum s_j^2} \le \cancel{\sum r_j^2} + 2\sqrt{\sum r_j^2}\sqrt{\sum s_j^2} + \cancel{\sum s_j^2} \quad \Longleftrightarrow$$

l'inégalité de Cauchy.

□

Exemple (Des espaces métriques)

1. Pour chaque X, la fonction
$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$
est une métrique (la métrique d'un égoïste ; la métrique discrète).
2. $d_{\mathcal{M}}(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ est une métrique sur $\mathbb{R}^2$ (la métrique de Manhattan).



Exemple (Des espaces métriques II)

3. $d_\infty(x,y) = \max\left\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\right\}$ est aussi une métrique sur $\mathbb{R}^2$.
4. Soit $\mathcal{C}^0[a,b]$ l'ensemble des fonctions continues $[a,b] \to \mathbb{R}$. Pour $f,g \in \mathcal{C}^0[a,b]$, on définit
$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx,$$
$$d_2(f,g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2\,dx\right)^{1/2},$$
$$d_\infty(f,g) = \sup\left\{|f(x) - g(x)| : x \in [a,b]\right\}.$$
d_1, d_2 et d_∞ sont des métriques sur $\mathcal{C}^0[a,b]$.

À titre d'exemple, on va démontrer : d_1 est une métrique sur $\mathcal{C}^0[a,b]$.

Démonstration.
M1 et M2 sont évidentes. Pour vérifier M3, on doit démontrer que

$$d_1(f,g) \leq d_1(f,h) + d_1(h,g) \quad \Longleftrightarrow$$
$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \overset{?}{\leq} \int_a^b |f(x) - h(x)|\, dx + \int_a^b |h(x) - g(x)\, dx.$$

La dernière inégalité découle de
$$|f(x) - g(x)| = \left|\big(f(x) - h(x)\big) + \big(h(x) - g(x)\big)\right| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$$
qui est simplement l'inégalité triangulaire de d_1 sur $\mathbb{R}$ (appliquée aux points $f(x),\ g(x)$ et $h(x)$). □

Exercice
Démontrer que d_2 et d_∞ sont bien des métriques sur $\mathcal{C}^0[a,b]$ et $\mathcal{C}^1[a,b]$.