Rappels

Définition

Un sous-ensemble $F \subset X$ est dit *fermé* si $X \setminus F$ est ouvert.

Lemme

(F1) *$X, \varnothing$ sont fermés.*

(F2) *Si $F_1, \ldots, F_k$ sont fermés, alors $F_1 \cup \cdots \cup F_k$ est fermé.*

(F3) *Si $\{F_i : i \in I\}$ est une collection quelconque de sous-ensembles fermés, alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est fermé.* □

Définition (Voisinage)

Soit X un espace topologique et $x \in X$. Tout sous-ensemble ouvert $V \subset X$ tq $V \ni x$ s'appelle *un voisinage* de x.

Définition

Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique X. Un point $x \in X$ est un *point limite*, ou *point d'adhérence* de A si pour tout voisinage $U \subset X$ de x, on a

$$(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing.$$

Rappels II

Définition

Soit $A \subset X$ un sous-ensemble d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. L'adhérence de A dans X est definie par

$$\bar{A} = \operatorname{adh}(A) := A \cup \left\{\text{points limites de } A\right\}.$$

Proposition

$\bar{A}$ est fermé pour tout $A \subset X$. En fait, $\bar{A}$ est le plus petit fermé qui contient A.

Définition

Soit $A \subset X$ un sous-ensemble d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. L'adhérence de A dans X est definie par

$$\bar{A} = \operatorname{adh}(A) := A \cup \left\{\text{points limites de } A\right\}.$$

Rappels III

Proposition

$\bar{A}$ est fermé pour tout $A \subset X$. En fait, $\bar{A}$ est le plus petit fermé qui contient A :

$$\bar{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ est fermé} \\ A \subset F}} F. \tag{*}$$

Définition

Soit M un ensemble non-vide. Une fonction $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ est une *métrique* si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

M1 $d(x,y) \geq 0$ pour tout $x, y \in M$ et $d(x,y) = 0$ ssi $x = y$

M2 $d(x,y) = d(y,x)$ pour tout $x, y \in M$.

M3 $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ pour tout $x, y, z \in M$ (*l'inégalité triangulaire*).

Le couple (M, d) est un *espace métrique*.

Rappels IV

Exemple (Des espaces métriques)

1. La métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^n$:

$$d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

2. La métrique de Manhattan sur $\mathbb{R}^n$: $d_{\mathcal{M}}(x,y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$.
3. $d_\infty(x,y) := \max\left\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\right\}$.
4. Sur l'ensemble des fonctions continues $\mathcal{C}^0[a,b]$, on peut définir les métriques suivantes :

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx,$$

$$d_2(f,g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2\, dx\right)^{1/2},$$

$$d_\infty(f,g) = \sup\left\{|f(x) - g(x)| : x \in [a,b]\right\}.$$

La distance de Levenshtein*

La distance de Levenshtein est une distance entre deux chaînes de caractères qui est égale au nombre minimal d'opérations nécessaires pour transformer une chaîne de caractères en une autre, à l'aide de remplacement, suppression et ajout d'un caractère.

Exemple

Prenons de mots : NICHE et CHIEN. En regardant le tableau

N	I	C	H		E	
		C	H	I	E	N

on déduit que $d_{Lev}\big(\text{NICHE},\ \text{CHIEN}\big) \le 4$. En fait, on peut vérifier que $d_{Lev}\big(\text{NICHE},\ \text{CHIEN}\big) = 4$.

Pour deux langues différentes, on compose une liste (100 mots, par exemple) de mots de même sens et on définit la distance lexicale entre ces deux langues par

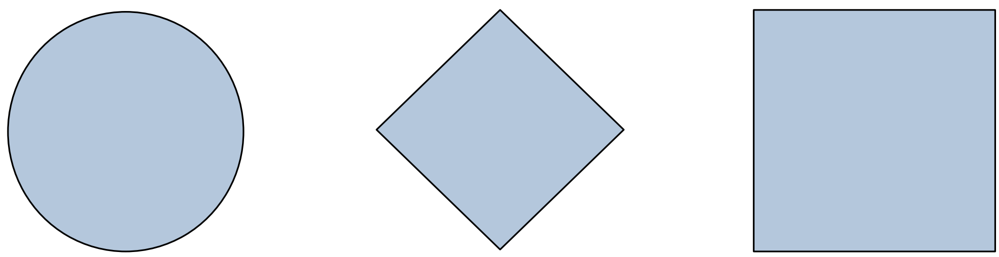
$$d_{DL}(\mathrm{L1}, \mathrm{L2}) := \sum_j d_{Lev}\big(\text{MOT}_j, \text{MOT}'_j\big)$$

Soit (M, d) un espace métrique quelconque. Comme dans le cas de $\mathbb{R}^n$, on définit

Définition

La boule ouverte centrée en $m \in M$ de rayon $r > 0$ est l'ensemble

$$B_r(m) = \big\{m' \in M : d(m, m') < r\big\}.$$



Les boules ouvertes dans $\mathbb{R}^2$ pour les métriques suivantes : euclidienne, de Manhattan et d_∞. Parfois, les boules ne sont pas si « rondes ».

Définition

Un sous-ensemble $U \subset M$ est dite ouvert si

$$\forall m \in U \quad \exists r > 0 \quad \text{tq} \quad B_r(m) \subset U.$$

Exercice

1. Démontrer que $B_r(m)$ est un ouvert.
2. Démontrer que $\{m' \in M \mid d(m,m') > r\}$ et un ouvert.

Désignons $\mathcal{T}_M := \{U \subset M \mid U \text{ est ouvert}\} = \mathcal{T}_{(M,d)} = \mathcal{T}_d$.

Proposition

$\mathcal{T}_M$ est une topologie sur M. Ainsi, chaque espace métrique est un espace topologique.

Démonstration : voir la démonstration pour $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ (Exercise !).

Proposition

Soit d la métrique discrète sur M. Alors, $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}^{discr}$.

Démonstration.

Puisque chaque point $\{m\} = B_1(m)$ est un ouvert dans (M,d), chaque sous-ensemble $U \subset M$ est ouvert :

$$U = \bigcup_{m \in U} \{m\}.$$

Donc, $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}^{discr}$. □

Question

Est-ce que toute topologie vient d'une métrique ?

Non. Pour démontrer cela, soit X un ensemble infini muni de la topologie cofinie. Supposons que $\mathcal{T}^{cofin} = \mathcal{T}_d$ pour une métrique d. Choisissons un $x \in X$ et considérons

$$X = \bar{B}_{1/2}(x) \cup \left(X \setminus B_{1/2}(x)\right) = \text{ fermé } \cup \text{ fermé}$$

$\implies$ X est fini parce que les fermés sont finis.

Métriques équivalentes

Parfois différentes métriques engendrent la même topologie.

Définition

Soient d, d' deux métriques sur l'ensemble M. Elles sont dites *Lipschitz équivalentes* (ou simplement équivalentes) s'il existe $A, B > 0$ tel que pour tout $x, y \in M$
$$A\, d(x,y) \leq d'(x,y) \leq B\, d(x,y).$$

Par exemple, les métriques euclidienne et de Manhattan sur $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes (Preuve ?).

Proposition

Si d et d' sont Lipschitz équivalentes, alors $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$.

La démonstration découle de l'observation suivante : Si d et d' sont Lipschitz équivalentes, alors $\forall m \in M$ et $\forall r > 0 \quad \exists r' > 0$ tq $B_r^d(m) \supset B_{r'}^{d'}(m)$
ET $\quad \forall m \in M$ et $\forall r' > 0$ $\exists r > 0$ tq $B_{r'}^{d'}(m) \supset B_r^d(m)$.

Supposons que (M, d_M) et (N, d_N) sont deux espaces métriques. Sur $M \times N$ définissons

$$\begin{aligned} d_1\big((m_1,n_1),(m_2,n_2)\big) &= d_M(m_1,m_2) + d_N(n_1,n_2), \\ d_2\big((m_1,n_1),(m_2,n_2)\big) &= \sqrt{d_M(m_1,m_2)^2 + d_N(n_1,n_2)^2}, \\ d_\infty\big((m_1,n_1),(m_2,n_2)\big) &= \max\big\{d_M(m_1,m_2),\ d_N(n_1,n_2)\big\}. \end{aligned}$$

Exercice

Démontrer que d_1, d_2 et d_∞ sont des métriques sur $M \times N$.

Ainsi, le produit d'espaces métriques est un espace métrique mais la métrique n'est pas unique. Néanmoins, on a le fait suivant.

Proposition

d_1, d_2 et d_∞ sont Lipschitz équivalentes.

À vous de la démontrer.

Suites et limites

Rappelons qu'une suite (x_n) dans $\mathbb{R}^n$ converge vers $x \in \mathbb{R}^n$ lorsque $n \to \infty$ si $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N > 0$ tq pour tout $n \geq N$ on a $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

Définition

Une suite (x_n) dans un espace métrique (M, d) converge vers $m \in M$ lorsque $n \to \infty$ si $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N > 0$ tq pour tout $n \geq N$ on a $d(x_n, x) < \varepsilon$.

Exercice

Montrer que la limite dans un espace métrique est unique si elle existe :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = m \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = m' \qquad \Longrightarrow \qquad m = m'.$$

Attention

La convergence est une propriété de la suite **et de la métrique.**

Exemple

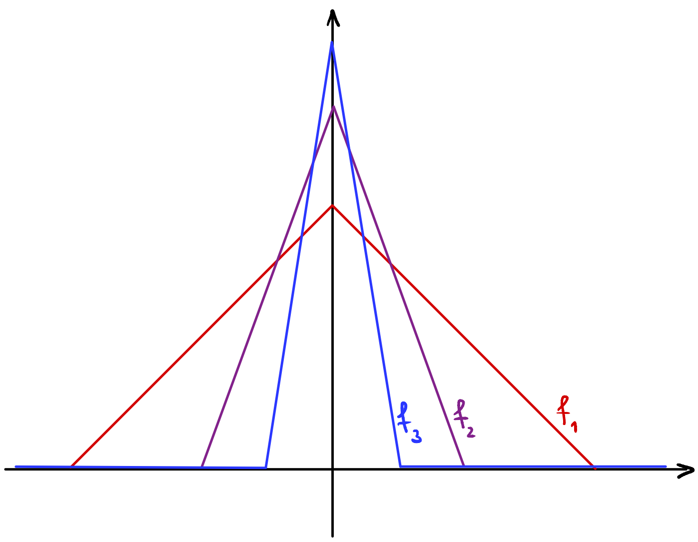
Dans un espace muni de la métrique discrète, une suite x_n converge ssi $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $x_N = x_{N+1} = x_{N+2} = \ldots$ Donc, $x_n = \frac{1}{n}$ converge dans $(\mathbb{R}, d_E)$, mais pas dans $(\mathbb{R}, d^{discr})$.

Pour construire un exemple plus intéressant, nous observons : Si $f_n \in \mathcal{C}^0[a, b]$ converge vers f par rapport à d_∞, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ une fonction positive tq $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ lorsque $|x| \geq 1$. Par exemple, on peut choisir

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Posons $f_n(x) := n^{1/2} f(nx)$ et considérons f_n comme une suite dans $\mathcal{C}^0[-1, 1]$.



- f_n ne converge pas par rapport à d_∞ parce que $f_n(0) = n^{1/2} \to \infty$.
- Soit $f(x) = 0\ \forall x$, alors $f = 0$. On a

$$d_1(f_n, 0) = \int_{-1}^{1} \left| n^{1/2} f(nx) \right| dx \overset{t=nx}{=} n^{-1/2} \int_{-n}^{n} \left| f(t) \right| dt$$

$$= n^{-1/2} \int_{-1}^{1} \left| f(t) \right| dt = const \cdot n^{-1/2} \longrightarrow 0.$$

Donc, f_n converge par rapport à d_1 vers $f = 0$.

Exercice ($*$)

Clarifier si f_n converge par rapport à d_2.

Sous-ensembles fermés dans espaces métriques

Proposition

Soit M un espace métrique, $A \subset M$ et $m \in M$. Alors, $m \in \bar{A}$ ssi il existe une suite $a_n \in A$ tq $a_n \to m$.

Démonstration.

Si $m \in A$, on peut poser $a_n = m$. Ainsi, supposons que $m \in \bar{A} \setminus A \implies m$ est un point d'adhérence de $A \implies \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists a_n \in A \cap B_{1/n}(m)$ parce que $B_{1/n}(a)$ est un voisinage de m. Par construction, $d(a_n, m) < \frac{1}{n}$ et donc a_n converge vers m.

Supposons que $\lim a_n = m$. S'il existe n tq $a_n = m$, on a $m \in A$. Alors, on peut supposer $a_n \neq m$ pour tout n.
Soit V un voisinage de m quelconque. Alors, $\exists r > 0$ tq $B_r(m) \subset V$. Puisque $\lim a_n = m$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $d(a_n, m) < r$ pour tout $n \geq N$. Ainsi, $a_N \in B_r(m) \implies a_N \in V$ et $a_N \neq m$. Donc, m est un point d'adhérence de A. $\square$

Théorème (Critère des suites pour un fermé)

Soit M un espace métrique. Un sous-ensemble $A \subset M$ est fermé si et seulement si, pour toute suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers $m \in M$ on a que $m \in A$.

La démonstration découle de la proposition précédente.

Applications continues dans des espaces métriques

Rappelons que $f\colon (M, d_M) \to (N, d_N)$ est dite continue, si
$U \in \mathcal{T}_N \implies f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_M$.

Théorème

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *f est continue ;*
2. *$\forall m \in M$ et $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(m, \varepsilon) > 0$ tq*
$$d_M(m', m) < \delta \implies d_N\big(f(m'), f(m)\big) < \varepsilon.$$
3. *$\forall m \in M$ et pour chaque suite (x_n) de points de M on a que*
$$\lim_{n\to\infty} x_n = m \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(m).$$

La démonstration se fait comme dans le cas des fonctions $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et reste à vous comme exercice.

Remarque

Comme dans le cas des fonctions $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on dit que $f\colon (M, d_M) \to (N, d_N)$ est continue en $m \in M$ si l'une des conditions équivalentes suivantes est respectée :

1. $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tq
$$d_M(m', m) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_N\big(f(m'), f(m)\big) < \varepsilon.$$
2. Pour chaque suite (x_n) de points de M on a
$$\lim_{n\to\infty} x_n = m \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(m).$$

Ainsi, f est continue ssi f est continue en tout $m \in M$.

Exemple

1. $id\colon (M, d_M) \to (M, d_M)$ est toujours continue.
2. $id\colon \big(\mathcal{C}^0[a,b], d_\infty\big) \to \big(\mathcal{C}^0[a,b], d_1\big)$, est continue parce que
$$d_\infty(f,g) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx < \delta(b-a).$$
Par contre, $id\colon \big(\mathcal{C}^0[a,b], d_1\big) \to \big(\mathcal{C}^0[a,b], d_\infty\big)$, n'est pas continue :
$$d_1(f,g) < \delta \quad \not\Longrightarrow \quad d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$
3. Plus généralement, soient d et d' deux métriques sur M. Alors,
$$d(m,m') \leq A\, d'(m,m') \quad \forall m, m' \in M$$
$$\Longrightarrow \quad id\colon (M,d) \to (M,d') \text{ est continue.}$$
Ainsi, si d et d' sont Lipschitz équivalentes, $id\colon (M,d) \to (M,d')$ et $id\colon (M,d') \to (M,d)$ sont continues.

Exemple (suite)

4. Soit $c \in [a, b]$. La fonction
$$ev_c\colon \big(\mathcal{C}^0[a,b], d_\infty\big) \to \mathbb{R}, \qquad ev_c(f) = f(c),$$
est continue, parce que $d_\infty(f,g) = \sup_x |f(x) - g(x)| < \delta \implies d_E\big(ev_c(f), ev_c(g)\big) = \big|f(c) - g(c)\big| < \delta$.
5. Pour tout $m_0 \in M$ la fonction $f(m) := d(m_0, m)$ est continue.

Pour voir le dernier exemple, on applique l'inégalité
$$\big|d(x,y) - d(x,z)\big| \leq d(y,z) \tag{*}$$
qui vaut pour tous les points x, y, z dans un espace métrique quelconque. L'inégalité (*) découle de l'inégalité triangulaire (montrer comme exercice !)

Remarques sur les suites dans les espaces topologiques

Définition

Une suite (x_n) dans un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ converge vers $x \in X$ lorsque $n \to \infty$ si pour chaque voisinage V de m il existe $N > 0$ tq pour tout $n \geq N$ on a que $x_n \in V$.

Contrairement au cas des espaces métriques, “la” limite n'est pas unique en général.

Exemple

1. Rappelons que $\mathcal{T}_X^{gross} = \{\varnothing, X\}$. Alors, dans $(X, \mathcal{T}_X^{gross})$ toute suite (x_n) converge et tout point $x \in X$ est sa limite parce que pour tout x il y a un seul voisinage : X.
2. Soit (x_n) une suite dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}^{cofin})$ tq $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$. Alors, tout $x \in \mathbb{R}$ est une limite de (x_n).

Proposition

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset X$. Si A est fermé, pour toute suite (a_n) de points de A qui admet une limite a, alors $a \in A$.

Exercice

Démontrer cette proposition.

Remarque $(*)$

En général, la propriété “pour toute suite (a_n) de points de A qui admet une limite a, alors $a \in A$” n'implique pas que A est fermé :
Comme pour $\mathcal{T}^{cofin}$, on définit

$$\mathcal{T}^{coden} := \left\{U \subset X \mid X \setminus U \text{ est vide, fini ou dénombrable}\right\}.$$

Dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}^{coden})$ considérons $A = (-\infty, 0]$. Si $(a_n) \subset A$ et $b > 0$, $\mathbb{R} \setminus \{(x_n)\}$ est un voisinage de $b \implies b$ n'est pas une limite de (x_n). Pourtant A n'est pas fermé (par rapport à $\mathcal{T}^{coden}$!).