Rappels

Définition

La boule ouverte centrée en $m \in M$ de rayon $r > 0$ est l'ensemble

$$B_r(m) = \left\{m' \in M : d(m, m') < r\right\}.$$

Définition

Un sous-ensemble $U \subset M$ est dite ouvert si

$$\forall m \in U \quad \exists r > 0 \quad \text{tq} \quad B_r(m) \subset U.$$

Définition

Une suite (x_n) dans un espace métrique (M, d) converge vers $x \in M$ lorsque $n \to \infty$ si $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N > 0$ tq pour tout $n \geq N$ on a $d(x_n, x) < \varepsilon$.

Rappels II

Définition

Soient d, d' deux métriques sur l'ensemble M. Elles sont dites *Lipschitz équivalentes* (ou simplement équivalentes) s'il existe $A, B > 0$ tel que pour tout $x, y \in M$

$$A\, d(x, y) \leq d'(x, y) \leq B\, d(x, y).$$

Soient d et d' Lipschitz équivalentes. La suite (x_n) converge par rapport à d ssi (x_n) converge par rapport à d'.

Théorème (Critère des suites pour un fermé)

Soit M un espace métrique. Un sous-ensemble $A \subset M$ est fermé si et seulement si, pour toute suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers $m \in M$ on a que $m \in A$.

Rappels III

Théorème

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $f\colon (M, d_M) \to (N, d_N)$ *est continue ;*
2. $\forall m \in M$ *et* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(m,\varepsilon) > 0$ *tq*
$$d_M(m', m) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_N\big(f(m'), f(m)\big) < \varepsilon.$$
3. $\forall m \in M$ *et pour chaque suite* (x_n) *de points de* M *on a que*
$$\lim_{n\to\infty} x_n = m \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(m).$$

La topologie induite

Soit (M, d) un espace métrique. Pour tout $A \subset M$ on obtient une métrique sur A par restriction : $d_A\colon A \times A \to \mathbb{R}$, $\quad d_A = d|_{A\times A}$.
d_A s'appelle la métrique induite (de celle de M sur A).

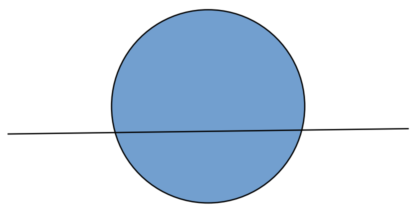
Exemple

Considérons $\mathbb{Z} \subset (\mathbb{R}, d_E)$. La métrique induite est $d_{\mathbb{Z}}(n,m) = |n-m|$.
Remarquez que $\mathcal{T}_{d_{\mathbb{Z}}}$ est la topologie discrète (parce que $B_1(n) = \{n\}$) bien que $d_{\mathbb{Z}}$ et la métrique discrète ne soient pas Lipschitz équivalents.

Exercice

Montrer que $B_r^A(a) = \{a' \in A \mid d_A(a', a) < r\} = B_r^M(a) \cap A$.

Par exemple, soit $M = \mathbb{R}^2$ muni de la métrique euclidienne et $A = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{[-10, 10] \times \{0\}\big\}$.
$B_2^A\big((0,1)\big)$ est non-connexe.



Proposition

Un sous-ensemble $U \subset A$ est ouvert par rapport à d_A ssi $\exists V \subset M$ qui est ouvert dans (M, d) tq $U = V \cap A$.

Démonstration.

Supposons que $U \subset A$ et un ouvert. Alors, $\forall u \in U \ \exists r = r(u) > 0$ tq $B^A_r(u) = \{u' \in U \mid d_A(u', u) < r\} \subset U$. Considérons

$$V := \bigcup_{u \in U} B^M_{r(u)}(u).$$

V est ouvert comme la réunion des ouverts et

$$V \cap A = \bigcup_{u \in U} \left(B^M_{r(u)}(u) \cap A\right) = \bigcup_{u \in U} B^A_{r(u)}(u) = U.$$

Inversement, supposons que $V \subset M$ est ouvert et $U = V \cap A$. Alors, $V \in \mathcal{T}_M$ $\implies \forall v \in V \quad \exists\, B^M_{r(v)}(v) \subset V$. En particulier, $\forall u \in U$ $B^A_{r(u)}(u) = B^M_{r(u)}(u) \cap A \subset V \cap A \implies V \cap A$ est ouvert dans (A, d_A). □

Ainsi, on a démontré que

$$\mathcal{T}_{d_A} = \left\{V \cap A \mid V \in \mathcal{T}_{(M,d)}\right\}. \qquad (*)$$

Pour les espaces topologiques on *définit* la top. induite en utilisant (*) :

Définition

Soit $A \subset (X, \mathcal{T})$ un sous-ensemble non-vide d'un espace topologique. Définissons une collection de sous-ensembles de A par

$$\mathcal{T}|_A = \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}.$$

$\mathcal{T}|_A$ est une topologie sur A appelée *la topologie induite*.

Remarque

Quand on pense à $A \subset X$ comme étant un espace topologique pour la topologie induite, on dit que A est un *sous-espace* de X.

On va démontrer plus tard que la top. induite est bien une topologie.

Exemple

1. $(0,1) \subset \mathbb{R}$: $U \subset (0,1)$ est ouvert ssi U est ouvert dans $\mathbb{R}$ parce que si V est ouvert dans $\mathbb{R}$ et $U = V \cap (0,1)$, U est ouvert dans $\mathbb{R}$.
2. $[0,1] \subset \mathbb{R}$:
   - $[0,\ 0,1)$ est ouvert parce que $[0,\ 0,1) = (-2,\ 0,1) \cap [0,\ 1]$.
   - $[0,\ 0,1]$ n'est pas ouvert.
   - $(0,5,\ 1]$ est ouvert.
   - En général, un ouvert de $[0,1]$ est de la forme suivante

   $$[0,\varepsilon) \cup V \cup (\delta,1] \quad \text{ou} \quad [0,\varepsilon) \cup V \quad \text{ou} \quad V \cup (\delta,1] \quad \text{ou} \quad V,$$

   où V est ouvert dans $(0,1)$.
3. $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$: la topologie induite est la topologie standard parce que $(a,b) = B_r(m) \cap \mathbb{R}$ si $m = \left(\frac{a+b}{2},\ 0\right)$ et $r = \frac{b-a}{2}$.

Attn : Un ensemble ouvert dans A n'est pas nécessairement ouvert dans X !

Lemma

La topologie induite $\mathcal{T}|_A$ est bien une topologie sur A.

Démonstration.

T1. $A = X \cap A$, $\varnothing = \varnothing \cap A$.

T2. Soient $V_1, \ldots, V_k \in \mathcal{T}|_A$. Alors il existe $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{T}$ t.q. $V_j = U_j \cap A$. Or

$$V_1 \cap \cdots \cap V_k = U_1 \cap A \cap \cdots \cap U_k \cap A = U_1 \cap \cdots \cap U_k \cap A.$$

Puisque $\mathcal{T}$ est une topologie, $U_1 \cap \cdots \cap U_k \in \mathcal{T}$. Donc $V_1 \cap \cdots \cap V_k \in \mathcal{T}|_A$.

T3. Soit $\{V_i : i \in I\}$ une collection quelconque d'éléments de $\mathcal{T}|_A$. Alors pour tout $i \in I$, il existe $U_i \in \mathcal{T}$ t.q. $U_i \cap A = V_i$. Or

$$\bigcup V_i = \bigcup (U_i \cap A) = \left(\bigcup U_i\right) \cap A.$$

Puisque $\mathcal{T}$ est une topologie, $\bigcup U_i \in \mathcal{T}$. Donc $\bigcup V_i \in \mathcal{T}|_A$. □

Proposition

1. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\varnothing \neq A \subset X$. Soit $\iota: A \to X$ l'inclusion. Alors ι est $(\mathcal{T}|_A, \mathcal{T})$-continue.*
2. *Soit $f: (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ continue et $\varnothing \neq A \subset X$. Alors, $f|_A := f \circ \iota : A \to Y$ est $(\mathcal{T}_X|_A, \mathcal{T}_Y)$-continue.*
3. *Soient $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques et $\varnothing \neq B \subset Y$. Alors une application $f: X \to B$ est $(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y|_B)$-continue si et seulement si $\iota \circ f$ est $(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y)$-continue.*

Démonstration de 2.

Soit $U \in \mathcal{T}_Y$. Alors,

$$\left(f \circ \iota\right)^{-1}(U) = \iota^{-1}\left(f^{-1}(U)\right) = f^{-1}(U) \cap A$$

est ouvert comme l'intersection des ouverts. □

Exercice

Démontrer 1. et 3.

Bases d'une topologie

Définition

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. *Une base de la topologie* est un sous-ensemble $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, $\mathcal{B} = \{B_j \mid j \in J\}$ tq tout ensemble ouvert de X est la réunion d'ensembles appartenant à $\mathcal{B}$:

$$\forall U \in \mathcal{T} \quad \exists K \subset J \quad \text{tq} \quad U = \textstyle\bigcup_{k \in K} B_k.$$

On observe :

- Tout $B \in \mathcal{B}$ est un ouvert de X;
- $\mathcal{B}$ est une base de la topologie ssi
  $\forall U \in \mathcal{T} \quad \text{et} \quad \forall x \in U \quad \exists B \in \mathcal{B} \quad \text{tq} \quad x \in B \subset U.$

Exemple

1. Pour un espace topologique quelconque $(X, \mathcal{T})$, $\mathcal{B} = \mathcal{T}$ est toujours une base de la topologie.

Exemple (suite)

2. Pour $(X, \mathcal{T}^{discr})$, $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ est une base. Donc, une base de la topologie n'est pas unique en général (en fait, presque jamais).
3. Dans un espace métrique, $\mathcal{B} := \{B_r(m) \mid m \in M,\ r \in (0, \infty)\}$ est une base. $\mathcal{B}' := \{B_r(m) \mid m \in M,\ r \in \mathbb{Q},\ r > 0\}$ est une base aussi.
4. $\mathcal{B} := \{B_r(p) \mid p \in \mathbb{Q}^n,\ r \in \mathbb{Q},\ r > 0\}$ est une base de la topologie de $\mathbb{R}^n$. En particulier, $\mathbb{R}^n$ admet une base de la topologie dénombrable.

Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ est une base de la topologie, on a que

B1 $\forall x \in X \quad \exists B \in \mathcal{B} \quad$ tq $\quad x \in B$.

B2 $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \quad$ et $\quad \forall x \in B_1 \cap B_2 \quad \exists B \in \mathcal{B} \quad$ tq $\quad x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

En effet, B1 est évidente. $B_1, B_2 \in \mathcal{T} \implies B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T} \implies$ B2.

B1 $\forall x \in X \quad \exists B \in \mathcal{B} \quad$ tq $\quad x \in B$.

B2 $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \quad$ et $\quad \forall x \in B_1 \cap B_2 \quad \exists B \in \mathcal{B} \quad$ tq $\quad x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Proposition

Soit $\mathcal{B}$ et une famille de sous-ensembles d'un ensemble $X \neq \varnothing$ quelconque. Si B1 et B2 sont satisfaites, il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ tq $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$.

Démonstration.

On définit $\mathcal{T} := \{U_K := \bigcup_{k \in K} B_k \mid K \subset J\} \cup \{\varnothing\}$. Alors, $\mathcal{T}$ est une topologie parce que

- B1 $\implies X \in \mathcal{T}$; De plus, T3 est évident.
- $V_K \cap V_L = \left(\bigcup_{k \in K} B_k\right) \bigcap \left(\bigcup_{\ell \in L} B_\ell\right) = \bigcup_{k \in K, \ell \in L} \left(B_k \cap B_\ell\right)$;

  $B_k \cap B_\ell \overset{B2}{=} \bigcup_{x \in B_k \cap B_\ell} B'_{k,l} \in \mathcal{T} \implies V_K \cap V_L \in \mathcal{T}$.

Par définition de $\mathcal{T}$, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$.

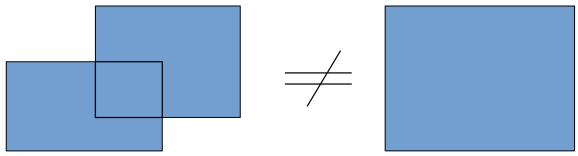
L'unicité : l'exercice. $\square$

Topologie du produit

Soit $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ des espaces topologiques. On est tenté de définir la topologie sur $X \times Y$ par

$$\left\{ U \times V \mid U \in \mathcal{T}_X,\ V \in \mathcal{T}_Y \right\}. \tag{*}$$

Pourtant, (*)
n'est pas une topologie parce que
T3 n'est pas satisfaite en général.



Lemme

(*) a les propriétés B1 et B2.

La démonstration : exercice.

Corollaire

(*) est la base d'une topologie sur $X \times Y$. Cette topologie s'appelle la topologie produit.

Exercice

Si $\mathcal{B}_X$ et $\mathcal{B}_Y$ sont des bases des topologies de X et Y respectivement, alors $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y := \left\{ B \times C \mid B \in \mathcal{B}_X,\ C \in \mathcal{B}_Y \right\}$ est une base de la topologie du produit.

Exemple

Considérons $\mathbb{R}^2$ comme le produit : $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$. Une base de la topologie du produit est constituée de rectangles $(a, b) \times (c, d)$. La topologie du produit coïncide avec la topologie standard (= celle induite par la métrique de Manhattan) parce que :

- Si U est ouvert par rapport à la topologie standard, on a $\forall u \in U \ \ \exists r > 0$ tq $B_r^{Manh}(u) \subset U$. Alors, U est ouvert par rapport à la topologie produit, parce que $B_r^{Manh}(u)$ est un rectangle.
- Si U est ouvert par rapport à la topologie du produit, $\forall u \in U$ $\exists (a, b) \times (c, d) \subset U \quad \text{tq} \quad u \in (a, b) \times (c, d) \implies \exists r > 0 \quad \text{tq}$ $B_r^{Manh}(u) \subset U$. Alors, U est ouvert par rapport à la topologie standard.

Attention

Un ouvert dans $X \times Y$ n'est pas nécessairement de la forme $U \times V$. Par exemple, la boule ouverte $B_1(0) = \left\{x_1^2 + x_2^2 < 1\right\} \subset \mathbb{R}^2$ n'est pas un rectangle !

Exercice

Généraliser l'exemple précédent pour montrer ce qui suit : Si (M, d_M) et (N, d_N) sont des espaces métriques, alors la topologie du produit sur $M \times N$ coïncide avec $\mathcal{T}_{d_1}$ où

$$d_1\big((m_1, n_1), (m_2, n_2)\big) = d_M(m_1, m_2) + d_N(n_1, n_2).$$

Exercice

Soient X et Y deux espaces topologiques. Choisissons un $y \in Y$ et identifions X avec $X \times \{y\} \subset X \times Y$. Montrer que la topologie induite sur $X \times \{y\}$ coïncide avec la topologie initiale de X.

Proposition

Les projections $p_1 : X \times Y \to X$ et $p_2 : X \times Y \to Y$ sont continues.

Démonstration.

$U \in \mathcal{T}_X \implies p_1^{-1}(U) = U \times Y \in \mathcal{T}_{X \times Y} \implies p_1$ est continue. □

Proposition

Soit $f : Z \to X \times Y$ une application où X, Y, Z sont des espaces topologiques. Alors f est continue ssi $\quad p_1 \circ f : Z \to X \quad$ et $\quad p_2 \circ f : Z \to Y$ sont continues.

Démonstration.

f est continue $\implies p_1 \circ f$ et $p_2 \circ f$ sont continues en tant que composition des applications continues.

Démonstration (suite).

Supposons que $p_1 \circ f$ et $p_2 \circ f$ sont continues. Soit $W \subset X \times Y$ ouvert pour la topologie produit et $z \in f^{-1}(W)$ quelconque. On va montrer qu'il existe un ouvert $T_z \subset f^{-1}(W)$ tq $z \in T_z$. Il s'ensuivra que $f^{-1}(W)$ est ouvert, puisque

$$f^{-1}(W) = \bigcup_{z \in W} T_z$$

est une union d'ouverts.

Écrivons $f(z) = (x, y) \in W$. Alors il existe des ouverts $x \in U \subset X$ et $y \in V \subset Y$ tq $U \times V \subset W$. L'hypothèse implique que $T_1 = (p_1 \circ f)^{-1}(U)$ et $T_2 = (p_2 \circ f)^{-1}(V)$ sont des ouverts. De plus $z \in T_1 \cap T_2$.

Il reste à vérifier que $T_1 \cap T_2 \subset f^{-1}(W)$. Mais si $\hat{z} \in T_1 \cap T_2$ alors $p_1(f(\hat{z})) \in U$ et $p_2(f(\hat{z})) \in V$, donc $f(\hat{z}) \in U \times V \subset W$. $\square$

Homéomorphismes

Définition

Une application $f : X \to Y$ est *un homéomorphisme* si

1. f est bijective.
2. f est continue.
3. f^{-1} est continue.

S'il existe un homéomorphisme entre X et Y, on dit que ces espaces sont homéomorphes.

En topologie, les homéomorphismes jouent un rôle similaire aux

- isomorphismes entre deux groupes en algèbre ou
- isomorphismes entre deux espaces vectoriels en algèbre linéaire.

Attention

1. et 2. $\not\Longrightarrow$ 3. car $id : (X, \mathcal{T}^{discr}) \to (X, \mathcal{T}^{gros})$ est bijective et continue, mais $id^{-1} = id : (X, \mathcal{T}^{gros}) \to (X, \mathcal{T}^{discr})$ n'est pas continue (si X contient au moins 2 points).