Rappels

Définition

Soit A un sous-ensemble non-vide d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. Définissons une collection de sous-ensembles de A par

$$\mathcal{T}|_A = \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}.$$

$\mathcal{T}|_A$ est une topologie sur A appelée *la topologie induite*.

Définition

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. *Une base de la topologie* est un sous-ensemble $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, $\mathcal{B} = \{B_j \mid j \in J\}$ tq tout ensemble ouvert de X est la réunion d'ensembles appartenant à $\mathcal{B}$:

$$\forall U \in \mathcal{T} \quad \exists K \subset J \quad \text{tq} \quad U = \textstyle\bigcup_{k \in K} B_k.$$

Rappels II

Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ est une base de la topologie, on a que

B1 $\forall x \in X \quad \exists B \in \mathcal{B} \quad \text{tq} \quad x \in B.$

B2 $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \quad \text{et} \quad \forall x \in B_1 \cap B_2 \quad \exists B \in \mathcal{B} \quad \text{tq} \quad x \in B \subset B_1 \cap B_2.$

Proposition

Soit $\mathcal{B}$ et une famille de sous-ensembles d'un ensemble $X \neq \varnothing$ quelconque. Si B1 et B2 sont satisfaites, il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ tq $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$.

Corollaire

La collection

$$\mathcal{B} := \left\{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_X,\ V \in \mathcal{T}_Y\right\} \tag{*}$$

est une base d'une topologie sur $X \times Y$ (la topologie produit).

Définition

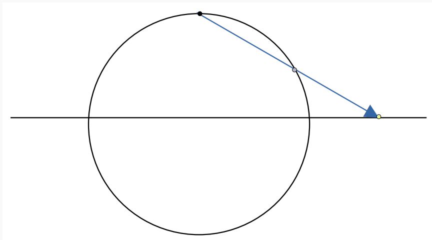
Une application $f\colon X \to Y$ est *un homéomorphisme* si

1. f est bijective.
2. f est continue.
3. f^{-1} est continue.

S'il existe un homéomorphisme entre X et Y, on dit que ces espaces sont homéomorphes.

Exemple

$S^1 \setminus \{pt\}$ et $\mathbb{R}$ sont homéomorphes. Exercice : trouver les formules pour $f\colon S^1 \setminus \{pt\} \to \mathbb{R}$ et $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to S^1 \setminus \{pt\}$ et prouver que ces deux applications sont continues.



Projection stéréographique

L'exemple précédent peut être généralisé pour les sphères de toutes dimensions : $S^n \setminus \{pt\}$ et $\mathbb{R}^n$ sont homéomorphes. Ici

$$S^n := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Explicitement,
en dimension 3 un homéomorphisme
$\varphi\colon S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$ est donné par

$$\varphi(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right), \qquad (x,y,z) \in S^2 \setminus \{N\},$$

où $N = (0,0,1)$. Cette application s'appelle *la projection stéréographique* (à partir du pôle nord).

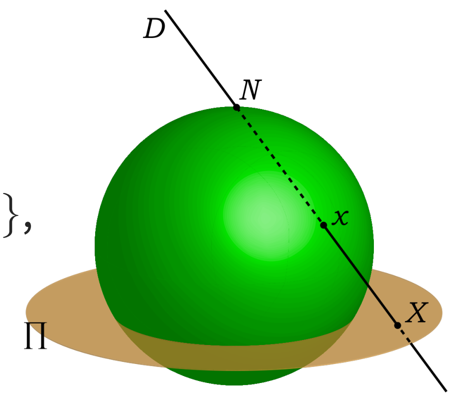


Image : Wikipedia.

Video : `https://youtu.be/VX-0Laeczgk`

Proposition

Un homéomorphisme est une application ouverte, càd que $f(U)$ est un ouvert si U est ouvert.

Démonstration.

Nous désignons $g = f^{-1}\colon Y \to X$. La preuve découle d'identité

$$g^{-1}(A) = \left\{ y \in Y \mid g(y) = a \in A \iff y = g^{-1}(a) = f(a) \right\} = f(A)$$

qui est valide pour tout $A \subset X$. Autrement dit,

$$\left(f^{-1}\right)^{-1}(A) = f(A).$$

Puisque f^{-1} est continue, $f(A)$ est ouvert si A est ouvert. $\square$

Remarque

Supposons que $f\colon X \to Y$ est bijective et continue. En fait, on a démontré que f est un homéomorphisme ssi f est une application ouverte (ou de manière équivalente ssi f est une application fermée)

Topologie quotient

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur X, càd que

- $x \sim x$;
- $x \sim y \implies y \sim x$;
- $x \sim y$ et $y \sim z \implies x \sim z$.

Désignons par $[x]$ la classe d'équivalence de x et par $X/\sim$ le quotient :

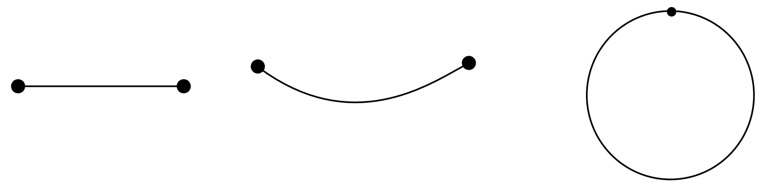
$$[x] = \left\{ x' \in X \mid x' \sim x \right\} \qquad \text{et} \qquad X/\sim = \left\{ [x] \in X \mid x \in X \right\}.$$

À titre d'exemple, définissons une relation d'équivalence sur $[0, 1]$ par

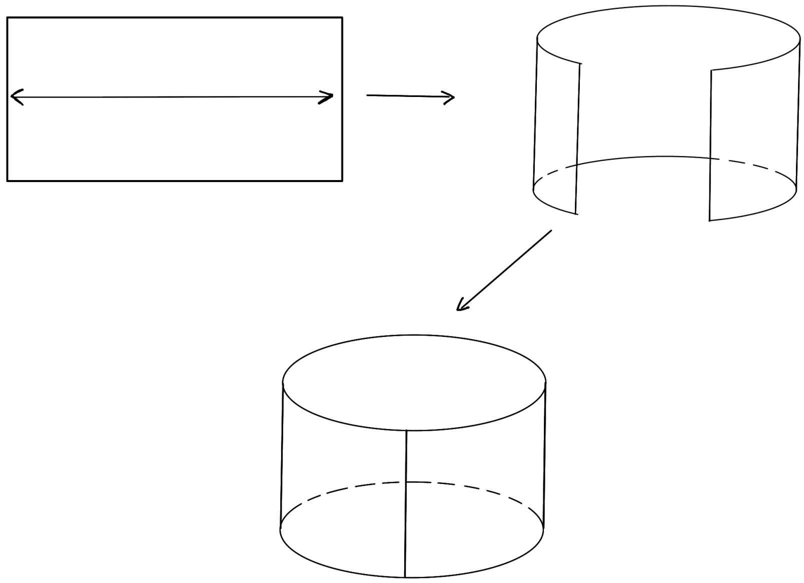
$$x \sim y \quad \iff \quad \begin{cases} x = y & \text{si } x, y \in (0, 1), \\ x = y \text{ ou } x = 1 - y & \text{si } x, y \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Effectivement, on doit identifier (« coller ») 0 et 1 (et seulement ces deux points).

En images,
cela se traduit comme suit :

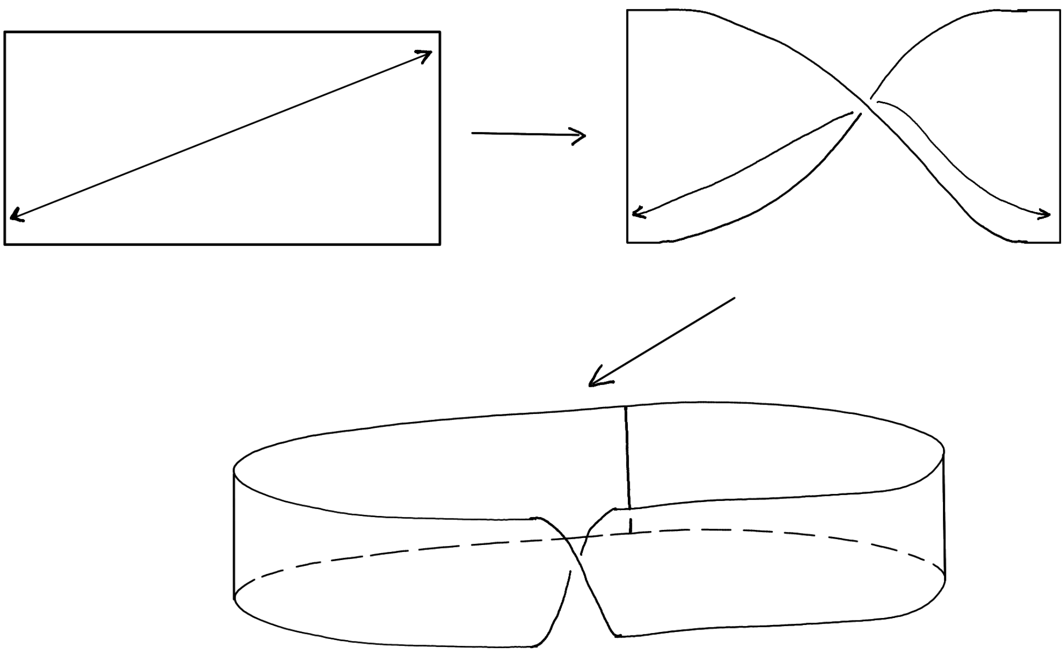


Un autre exemple :
$X = [0,1] \times [0,1]$, $(1,y) \sim (0,y)$ pour tout $y \in [0,1]$.

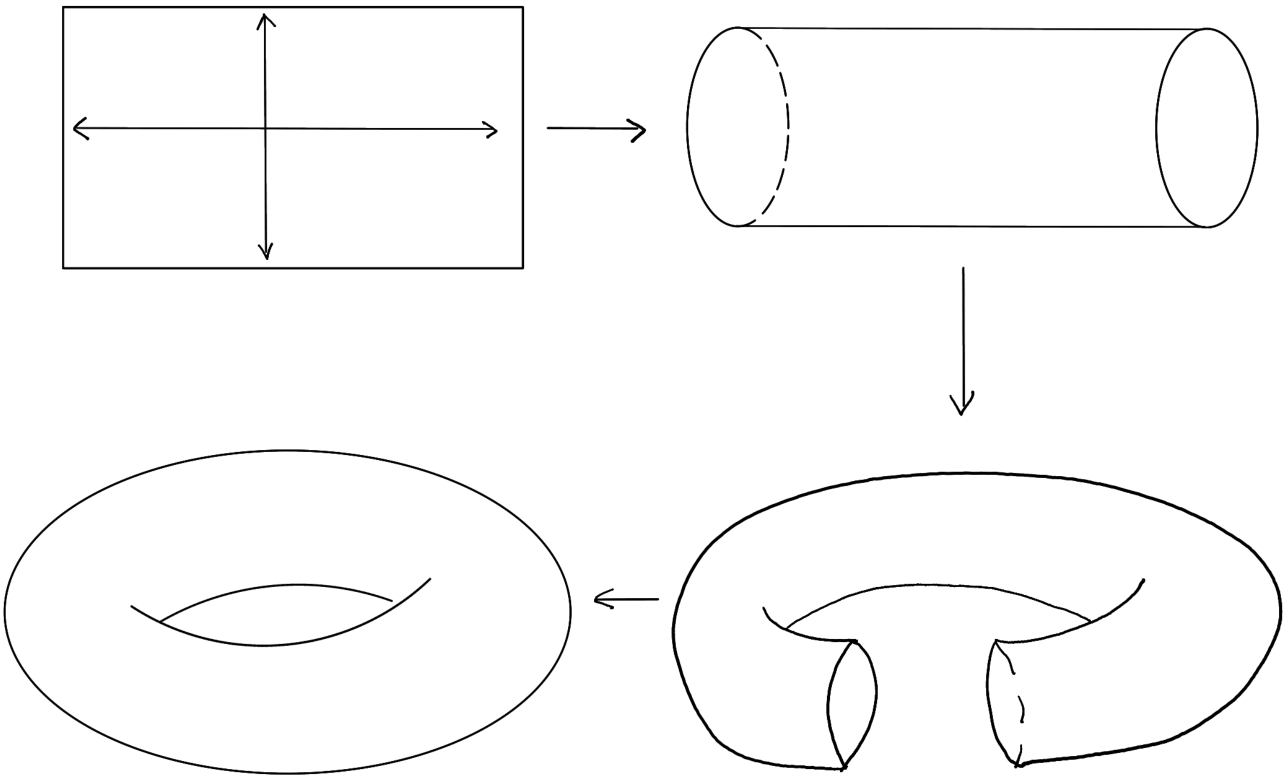


Ruban de Möbius

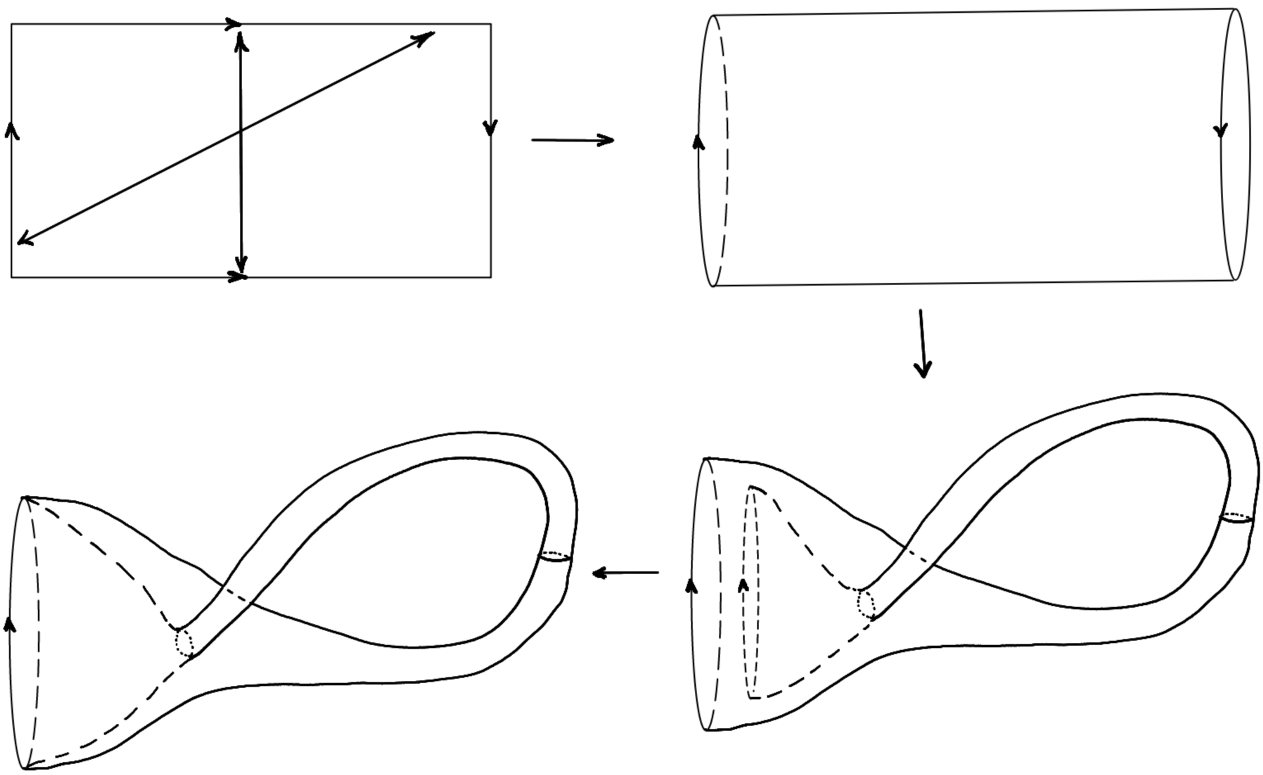
Encore un autre exemple : $X = [0,1] \times [0,1]$, $(1,y) \sim (0,1-y)$ pour tout $y \in [0,1]$.



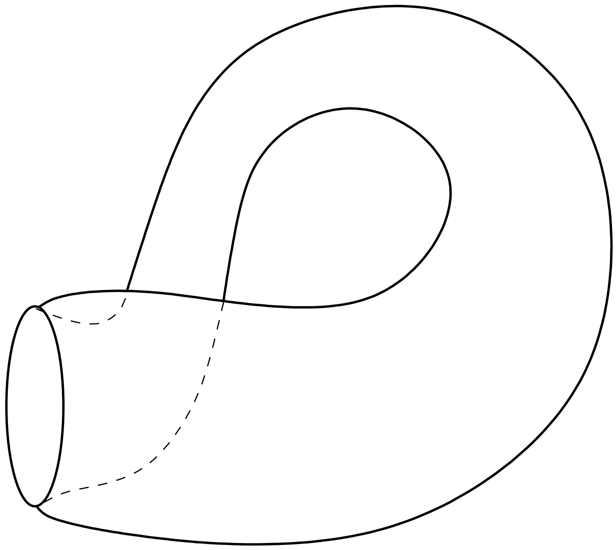
Le tore



La bouteille de Klein



La bouteille de Klein (suite)



On peut démontrer que La bouteille de Klein ne peut pas se plonger dans $\mathbb{R}^3$ (nous n'essaierons ni de prouver cette affirmation, ni même de la préciser au cours).

Nous avons construit le cercle, le ruban de Möbius, le tore et la bouteille de Klein comme des ensembles quotients. On peut munir ces ensembles (et les ensembles quotients en général) avec une topologie de la manière suivante.

Soit $\pi : X \to X/\sim$ la projection canonique : $\pi(x) = [x] = \{x' \in X \mid x' \sim x\}$.

Définition

Soit X un espace topologique et $\sim$ une relation d'équivalence sur X quelconque. La famille $\mathcal{T}_{X/\sim}$ définie par

$$\mathcal{T}_{X/\sim} \ni U \quad \Longleftrightarrow \quad \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$$

s'appelle *la topologie quotient* sur $X/\sim$.

Lemme

La topologie quotient est bien une topologie.

Démonstration.

Désignons $Y := X/\sim$.
T1 : $\pi^{-1}(\varnothing) = \varnothing, \pi^{-1}(Y) = X$.

T2 : $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{T}_Y \iff \pi^{-1}(U_j) \in \mathcal{T}_X$ pour tout $j = 1, \ldots, k$. Alors,

$$\pi^{-1}(U_1 \cap \cdots \cap U_k) = \pi^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap \pi^{-1}(U_k) \in \mathcal{T}_X.$$

Donc $U_1 \cap \cdots \cap U_k \in \mathcal{T}_Y$.

T3 : Soit $\{U_i : i \in I\}$ une collection d'éléments $U_i \in \mathcal{T}_Y \iff \pi^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}_X$.
Alors,

$$\pi^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} U_i\Big) = \bigcup_{i\in I} \pi^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}_X.$$

Donc $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_Y$. □

Lemme

Soit $\pi\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (X/\sim, \mathcal{T}^{quot}) = (Y, \mathcal{T}^{quot})$ la projection et $f\colon Y \to (Z, \mathcal{T}_Z)$. Alors f est $(\mathcal{T}^{quot}, \mathcal{T}_Z)$-continue ssi $f \circ \pi \colon X \to Z$ est $(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Z)$-continue.

On représente souvent cette situation par le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f\circ\pi"] \arrow[d, "\pi"'] & Z \\ Y \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Démonstration.

Si f est continue, alors $f \circ \pi$ est continue en tant que composition des applications continues.

Supposons que $f \circ \pi$ est continue. Soit $U \subset Z$ un ouvert. Puisque

$$(f \circ \pi)^{-1}(U) = \pi^{-1}(f^{-1}(U))$$

est ouvert, on a que $f^{-1}(U)$ est ouvert par définition de $\mathcal{T}^{quot}$. Alors, f est continue. □

Exemple

Définissons $\sim$ sur $[0,1]$ par

$$0 \sim 1 \; (\implies 1 \sim 0) \qquad \text{et} \qquad x \sim x \quad \forall x \in [0,1].$$

L'application $F\colon [0,1] \to S^1$ définie par $F(t) = \big(\cos(2\pi t),\ \sin(2\pi t)\big)$ est continue et $F(0) = F(1)$. Donc, on a l'application induite $f\colon [0,1]/\sim\; \to S^1$ qui est bijective et continue selon le lemme.

Pour montrer que f est un homéomorphisme, on montrera que $f\colon [0,1]/\sim\; \to S^1$ est fermée. Choisissons un fermé $A \subset [0,1]/\sim$ et supposons que $p = \lim f(q_n) \in S^1$ existe où $q_n \in A$. Puisque S^1 est un espace métrique, il suffit de montrer que $p \in f(A)$.

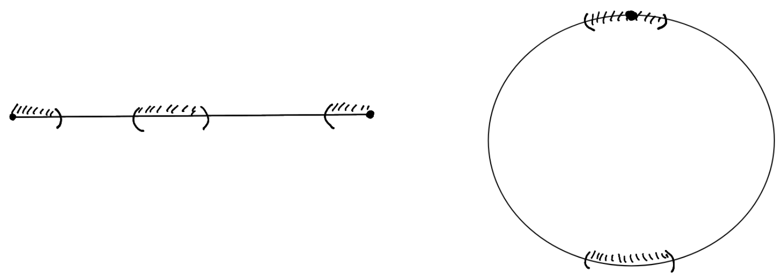
Choisissons $\tilde{q}_n \in [0,1]$ tq $\pi(\tilde{q}_n) = q_n$. Par le théorème de Bolzano–Weierstrass, il existe une sous-suite $\tilde{q}_{n_k}$ convergente. Alors, $\tilde{q} := \lim \tilde{q}_{n_k} \in \pi^{-1}(A)$ parce que $\pi^{-1}(A)$ est fermé.

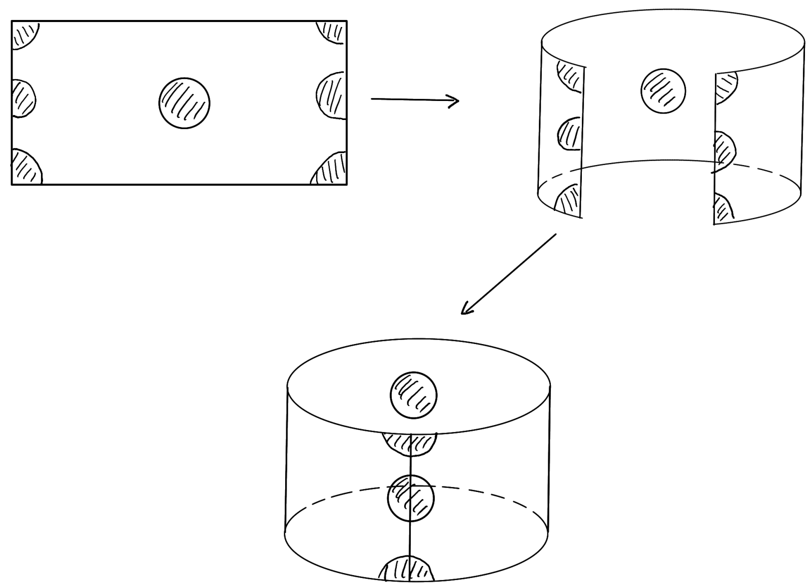
Puisque F est continue,

$$p = \lim f(q_{n_k}) = \lim F(\tilde{q}_{n_k}) = F(\tilde{q}) = f\big(\pi(\tilde{q})\big) \in f(A).$$

Ainsi, $f(A)$ est fermé et donc f est un homéomorphisme.

Bases des topologies quotients





Bien évidemment, $\pi : X \to X/\sim$ est continue si on munit $X/\sim$ de la topologie quotient. En fait, la topologie quotient est la plus grande topologie tq $\pi : X \to X/\sim$ est continue dans le sens suivant :

- Désignons par $\mathcal{T}^q$ la top. quotient sur $Y = X/\sim$. Si $\mathcal{T}'$ est une topologie sur Y telle que $\pi : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}')$ est continue, alors $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}^q$.

Attention

$V \in \mathcal{T}_X \not\Longrightarrow \pi(V) \in \mathcal{T}_Y$ car pour $\pi : [0,1] \to [0,1]/\sim \cong S^1$ on a que $[0, \varepsilon)$ est ouvert dans $[0,1]$, mais $\pi\big([0,\varepsilon)\big)$ n'est pas ouvert dans S^1 !

Remarque

La topologie quotient est un exemple d'une construction plus générale : Soit $(X, \mathcal{T}_X)$ un espace topologique, Y un ensemble et $f : X \to Y$ une application surjective quelconque. On définit une topologie $\mathcal{T}_f$ sur Y comme la topologie quotient :

$$\mathcal{T}_f := \left\{ V \subset Y \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X \right\}.$$

C'est la plus grande topologie telle que f est continue.

Groupes

Des relations d'équivalence apparaissent souvent par le biais d'actions de groupes.
Rappelons qu'un *groupe* est un ensemble G muni de deux applications

$$G \times G \to G, \quad (g,h) \mapsto g \cdot h \qquad \text{et} \qquad G \to G, \quad g \mapsto g^{-1}$$

telles que

G1 $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ pour tous $a, b, c \in G$;

G2 $\exists e \in G$ tq $e \cdot g = g = g \cdot e$ pour tout $g \in G$;

G3 $g \cdot g^{-1} = e = g^{-1} \cdot g$ pour tout $g \in G$.

Si en plus $g \cdot h = h \cdot g$ pour tous $g, h \in G$, le groupe G est dit *commutatif* ou *abélien*. Dans ce cas-là, on écrit habituellement

$g + h$ au lié de $g \cdot h$, $\quad 0$ au lié de e $\quad$ et $\quad -g$ au lié de g^{-1}.

Exemple

- Le groupe le plus simple : $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$.
- $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$.
- $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$;
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$ muni du produit matriciel; $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$;
- $O(n) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^t = Id = A^t \cdot A\}$.

Définition (Opération de groupe)

Une opération (ou action) d'un groupe G sur un ensemble X est une application

$$G \times X \to X, \qquad (g, x) \mapsto g \cdot x$$

vérifiant les propriétés suivantes :

A1 $e \cdot x = x$ pour tout $x \in X$;

A2 $g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x$ pour tous $g, h \in G$ et pour tout $x \in X$.

Pour un $g \in G$ fixé, on désigne $L_g : X \to X$, $L_g(x) = g \cdot x$.

Attention

On ne doit pas confondre le produit $G \times G \to G$ avec une action $G \times X \to X$ même si la notation est la même.

Exemple

1. $G = \{1, -1\} \cong \mathbb{Z}_2$ opère sur $X = \mathbb{R}$ par $(-1) \cdot x = -x$ et $1 \cdot x = x$.
   $\{\pm 1\}$ opère aussi, par exemple, sur $\mathbb{R}^n$ et
   $$S^n = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$
   par multiplication de chaque x_j.
2. $(\mathbb{Z}, +)$ opère sur $X = \mathbb{R}$ par $(t, x) \mapsto t + x$.
3. Chaque groupe opère sur lui-même : $X = G$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$. Dans cet exemple $\cdot$ est identique.
4. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ opère sur $\mathbb{R}^n$ par
   $$(A, x) \mapsto A \cdot x = \Big(\sum_j a_{1j} x_j, \ \ldots, \ \sum_j a_{nj} x_j\Big)^t.$$

La relation d'équivalence associée à une opération

Chaque action de groupe donne lieu à une relation d'équiv. comme suit.

Lemme

Soit donnée une opération d'un groupe G sur X. La relation sur X définie par

$$x \sim x' \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists g \in G \quad tq \quad x' = g \cdot x$$

est une relation d'équivalence.

Démontrer ce lemme à titre d'exercice !

Dans ce cas, la classe d'équivalence $[x] = O_X$ d'un $x \in X$ s'appelle *l'orbite* de x. On désigne $X/\sim = X/G$.

Définition

Une action d'un groupe (discret) G sur un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dite continue si

$$L_g : X \to X, \qquad L_g(x) := g \cdot x$$

est continue pour tout $g \in G$.

Plus tard, nous verrons (?) les opérations dans le cas ou G est un groupe topologique (non-discret).

Proposition

Si G opère continûment sur X, L_g est un homéomorphisme pour tout $g \in G$.

Démonstration.

$$\left(L_{g^{-1}} \circ L_g\right)(x) = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1} \cdot g) \cdot x = e \cdot x = x \qquad \Longrightarrow \qquad L_{g^{-1}} \circ L_g = id_X.$$

De la même manière, $L_g \circ L_{g^{-1}} = id_X$. Alors, $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ existe et est continue. □

Le cercle / le tore

Considérons l'opération de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$:

$$(n,x) \longmapsto x+n.$$

Évidemment, toute orbite contient un représentant unique dans $[0,1)$ $\Longleftrightarrow$ toute orbite contient un représentant unique dans $[0,1]$ sauf O_1, qui contient exactement deux représentants : 0 et 1. Alors,

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \;\cong\; [0,1]/\sim \,\cong\; S^1.$$

Exercice

Considérons l'opération de $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{R}^2$:

$$\big((n,m),(x,y)\big) \longmapsto (x+n,\; y+m).$$

Montrer que $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \;\cong\; T$, ou T est le tore.

L'espace projectif

Définition

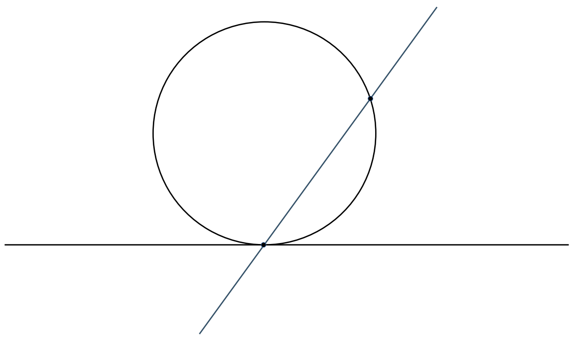
L'ensemble des droites vectorielles dans $\mathbb{R}^{n+1}$ s'appelle l'espace projectif réel. On désigne cette espace par $\mathbb{RP}^n$.

Nous démontrons plus tard que $\mathbb{RP}^n$ est un espace topologique. A ce moment-là, nous avons défini $\mathbb{RP}^n$ seulement comme un ensemble.

On peut comprendre $\mathbb{RP}^n$ comme un ensemble paramétrisant l'ensemble des droites vectorielles dans $\mathbb{R}^{n+1}$, càd que chaque point de $\mathbb{RP}^n$ correspond à une droite vectorielle dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exemple

Il y a une correspondance bijective (en fait, un homéomorphisme) entre $\mathbb{RP}^1$ et le cercle S^1 :



Rappelons qu'une droite vectorielle est un ensemble $\ell_v := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x = \lambda v\}$ où $v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Ainsi, on peut définir $\mathbb{RP}^n$ comme un ensemble quotient :

$$\mathbb{RP}^n := \left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right)/\sim, \qquad \text{où} \quad v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ tq } w = \lambda v.$$

De façon équivalente, puisque chaque droite intersecte la sphère en exactement deux points, qui sont antipodaux, nous avons également

$$\mathbb{RP}^n := S^n/\sim, \qquad \text{où} \quad v \sim w \iff w = \pm v.$$

Ainsi, on a la projection canonique $\pi : S^n \to \mathbb{RP}^n$. On <u>définit</u> une topologie sur $\mathbb{RP}^n$ comme la topologie induite de S^n, càd que

$$\mathbb{RP}^n \supset V \text{ est ouvert} \qquad \iff \qquad S^n \supset \pi^{-1}(V) \text{ est ouvert.}$$