Théorème

Soit X un espace topologique muni d'une opération continue d'un groupe G. Supposons que $\forall x, x' \in X$ tq $O_X \neq O_{X'}$ $\exists$ un voisinage U de x et un voisinage U' de x' tq

$$U \cap gU' = \varnothing \qquad \forall g \in G.$$

Alors, X/G est Hausdorff (et $\pi : X \to X/G$ est une application ouverte).

Démonstration.

Soit $U \subset X$ ouvert et $V := \pi(U)$. Puisque

$$\pi^{-1}(V) = \bigcup_{g \in G} gU \tag{$*$}$$

est ouvert comme la réunion des ouverts, $V \subset X/G$ est ouvert par définition de la topologie induite. Ainsi, π est une application ouverte. □

Démonstration (suite).

Soient maintenant x, x' et U, U' comme dans la formulation de ce théorème. Donc, $V = \pi(U)$ est un voisinage de $[x]$, $V' = \pi(U')$ est un voisinage de $[x']$ et on a

$$\pi^{-1}(V \cap V') = \pi^{-1}(V) \cap \pi^{-1}(V').$$

En utilisant $(*)$, on obtient

$$\pi^{-1}(V \cap V') = \Big(\bigcup_{g \in G} gU\Big) \bigcap \Big(\bigcup_{h \in G} hU'\Big) = \bigcup_{g,h \in G} \big(gU \cap hU'\big).$$

Puisque

$$gU \cap hU' = g\big(U \cap g^{-1}hU'\big) = \varnothing,$$

on obtient $\pi^{-1}(V \cap V') = \varnothing$. Enfin, par la surjectivité de π on obtient $V \cap V' = \varnothing$. Ainsi, X/G est Hausdorff. □

Exemple

1. Considérons l'opération de $(\mathbb{Z},+)$ sur $X=\mathbb{R}$ définie par $(n,x)\mapsto x+n$. Pour $x,x'\in\mathbb{R}$ tq $O_x\neq O_{x'}$, posons
$$\delta := \frac{1}{4}\inf\left\{|x-x'-n| \ : \ n\in\mathbb{Z}\right\}>0.$$
Il suit que $U:=(x-\delta,\ x+\delta)$ et $U':=(x'-\delta,\ x'+\delta)$ satisfont l'hypothèse du théorème. Alors, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est un espace Hausdorff.
Exercice : Montrer, que l'application $F\colon\mathbb{R}\to S^1$ définie par $F(t)=\big(\cos 2\pi t,\ \sin 2\pi t\big)$ induit un homéomorphisme $f\colon\mathbb{R}/\mathbb{Z}\to S^1$.

2. Considérons l'opération de $\mathbb{Z}^2$ sur $X=\mathbb{R}^2$ définie par $\big((n,m),(x,y)\big)\mapsto(x+n,\ y+m)$.
Exercice : Montrer, que l'espace quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est Hausdorff et que l'application $F\colon\mathbb{R}^2\to S^1\times S^1$ definie par
$$F(x,y)=\big(\cos 2\pi x,\ \sin 2\pi x,\ \cos 2\pi y,\ \sin 2\pi y\big)$$
induit un homéomorphisme $f\colon\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2\to S^1\times S^1$.

Exemple (suite)

3. Considérons l'opération de $\mathbb{Z}_2=\{\pm 1\}$ sur $X=S^n$ définie par
$$\varepsilon\cdot x=\big(\varepsilon x_0,\ldots,\varepsilon x_n\big).$$
Si $O_x\neq O_{x'}$, on a $x\neq x'$ et donc on peut trouver des voisinages $U_0\ni x$ et $U_0'\ni x'$ tq $U_0\cap U_0'=\varnothing$ parce que S^n est Hausdorff. De la même manière, il existe des voisinages $U_1\ni x$ et $U_1'\ni -x'$ tq $U_1\cap U_1'=\varnothing$. Donc, si on pose
$$U:=U_0\cap U_1 \qquad \text{et} \qquad U':=U_0'\cap\big(-U_1'\big)$$
on obtient $U\cap U'=\varnothing=U\cap(-U')$. Ainsi, $S^n/\mathbb{Z}_2$ est Hausdorff.

$S^2/\mathbb{Z}_2$ est clairement le plan projectif $\mathbb{RP}^2$, càd que le plan projectif est un espace Hausdorff.