Quand les espaces quotients sont-ils Hausdorff ?

Un quotient d'un espace Hausdorff n'a pas besoin d'être Hausdorff.

Exemple

1. Considérons la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$:
$$x \sim y \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x \text{ et } y \in \mathbb{Q}) \text{ OU } (x \text{ et } y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}).$$
Donc, rationnel $\sim$ rationnel, irrationnel $\sim$ irrationnel, mais rationnel $\not\sim$ rationnel. Alors, $\mathbb{R}/\sim = \{a, b\}$ muni de la topologie grossière (plus petite). Ainsi, $\mathbb{R}/\sim$ n'est pas Hausdorff.
2. Considérons la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$:
$$x \sim y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \text{ et } y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad 0 \sim 0.$$
Ainsi, $\mathbb{R}/\sim = \{a, b\}$ en tant qu'ensemble, mais la topologie est différente
$$\mathcal{T} = \big\{\varnothing,\ \{a, b\},\ \{a\}\big\}.$$
C'est l'exemple non trivial le plus simple d'un espace non Hausdorff.

Théorème

Soit X un espace topologique muni d'une opération continue d'un groupe G. Supposons que

1. $\forall x \in X \quad \exists$ *un voisinage U de x tq* $\forall g \in G \setminus \{e\}$
$$gU \cap U = L_g(U) \cap U = \varnothing.$$
2. $O_x \neq O_{x'} \implies \exists$ *un voisinage U de x et un voisinage U' de x' tq* $\forall g \in G$ *on a* $\quad U \cap gU' = \varnothing$.

Alors, X/G est Hausdorff.

Notons que la propriété 1. implique que X est Hausdorff.

Démonstration.

Désignons $\pi : X \to X/G$ et posons $V = V_x := \pi(U) \subset X/G$, où U est un voisinage comme dans la propriété 1. Considérons

$$\pi^{-1}(V) = \left\{ y \in X \mid \exists z \in U \quad \text{tq} \quad y = g \cdot z \right\} = \bigsqcup_{g \in G} gU.$$

Tout sous-ensemble $gU = L_g(U)$ est ouvert puisque L_g est un homéomorphisme et donc une application ouverte. Alors, $\pi^{-1}(V)$ est ouvert $\iff$ V est ouvert par définition de la topologie quotient. Évidemment, si $U' \subset X$ est ouvert et $U' \subset U$, alors $V' := \pi(U')$ est ouvert dans X/G et

$$\pi^{-1}(V') = \bigsqcup_{g \in G} gU'.$$

Notons que $\pi : U \to V$ est bijective parce que

$$\pi(x) = \pi(x') \quad \Longrightarrow \quad x' = g \cdot x \in U \cap gU \quad \Longrightarrow \quad g = e \quad \Longrightarrow \quad x = x'.$$

Donc, $\pi|_U : U \to V$ est bijective, continue et ouverte $\Longrightarrow$ $\pi|_U$ est un homéo. □

Démonstration (suite).

Soit $[x] \neq [x'] \implies x \neq x'$. Pour x' on trouve les voisinages U' de x' et V' de $[x']$ tq $\pi : U' \to V'$ est un homéo et $\pi^{-1}(V') = \bigsqcup gU'$. Par la propriété 2., on peut supposer que

$$U \cap gU' = \varnothing \qquad \forall g \in G.$$

Nous avons

$$V \cap V' \neq \varnothing \quad \iff \quad \pi^{-1}(V) \cap \pi^{-1}(V') \neq \varnothing \quad \iff \quad \exists g \in G \text{ tq } U \cap gU' \neq \varnothing.$$

Ainsi, $V \cap V' = \varnothing$ et X/G est Hausdorff. □

Exemple

1. Considérons l'opération de $(\mathbb{Z},+)$ sur $X=\mathbb{R}$ définie par $(n,x)\mapsto x+n$. Pour un $x\in\mathbb{R}$ quelconque, posons $U=\big(x-1/4,\ x+1/4\big)$.
   Évidemment, pour chaque $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ on a que
   $$U\cap nU=\big(x-1/4,\ x+1/4\big)\bigcap\big(x+n-1/4,\ x+n+1/4\big)=\varnothing.$$
   Alors, la propriété 1. est satisfaite. De la même manière, on peut démontrer la propriété 2. Alors, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est un espace Hausdorff.
   Exercice : Montrer, que l'application $F\colon\mathbb{R}\to S^1$ definie par $F(t)=\big(\cos 2\pi t,\ \sin 2\pi t\big)$ induit un homéomorphisme $f\colon\mathbb{R}/\mathbb{Z}\to S^1$.

2. Considérons l'opération de $\mathbb{Z}^2$ sur $X=\mathbb{R}^2$ définie par $\big((n,m),(x,y)\big)\mapsto(x+n,\ y+m)$.
   Exercice : Montrer, que l'espace quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est Hausdorff et que l'application $F\colon\mathbb{R}^2\to S^1\times S^1$ definie par
   $$F(x,y)=\big(\cos 2\pi x,\ \sin 2\pi x,\ \cos 2\pi y,\ \sin 2\pi y\big)$$
   induit un homéomorphisme $f\colon\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2\to S^1\times S^1$.

Exemple (suite)

3. Considérons l'opération de $\mathbb{Z}_2=\{\pm1\}$ sur $X=S^n$ définie par
   $$\varepsilon\cdot x=\big(\varepsilon x_0,\dots,\varepsilon x_n\big).$$
   Pour tout $x\in S^n$ il existe évidemment un j tq $x_j\neq 0$. Si $x_j>0$, on peut poser
   $$U_x:=S^n\cap\{x_j>0\},$$
   qui est ouvert. De plus, $U_x\cap -U_x=\varnothing$. Si $x_j<0$, on peut choisir $U_x:=S^n\cap\{x_j<0\}$. Ça démontre la propriété 1. La propriété 2. est à vous de démontrer comme exercice. Ainsi, $S^n/\mathbb{Z}_2$ est Hausdorff.

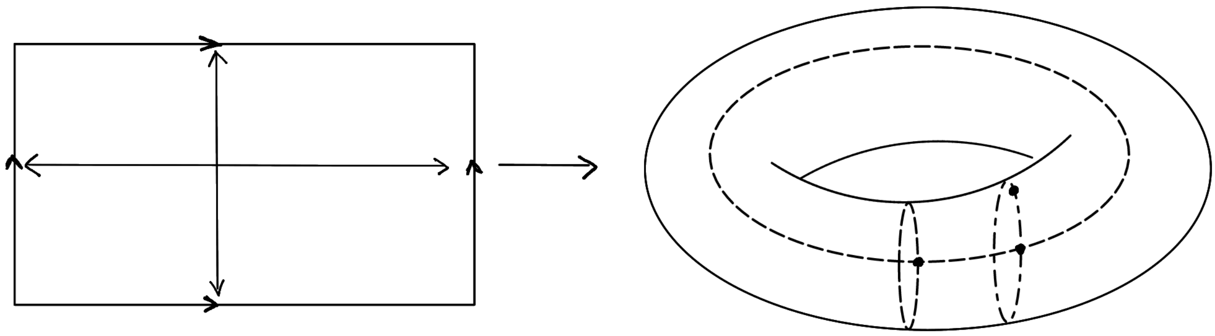
   $S^n/\mathbb{Z}_2$ est clairement le plan projectif $\mathbb{RP}^2$, càd que le plan projectif est un espace Hausdorff.

Le tore (revisité)

Considérons l'opération de $\mathbb{Z}^2$ sur $X = \mathbb{R}^2$ comme dans l'exemple 2.

Exercice

Montrer que le carré $R := [0,1] \times [0,1]$ contient au moins un représentant de toute classe d'équivalence. En plus, chaque $(x,y) \in (0,1) \times (0,1)$ est l'unique représentant de sa classe d'équivalence.



Visuellement, il y a une bijection entre le tore et $S^1 \times S^1$. On a démontré déjà qu'en fait, c'est un homéomorphisme.

Espaces connexes

Intuitivement un espace est connexe s'il ne tombe pas en plusieurs morceaux.

Définition

Un espace topologique X est dit *connexe* si

$$X = U \cup V \quad \text{et} \quad U \cap V = \varnothing \quad \Longrightarrow \quad U = \varnothing \quad \text{ou} \quad V = \varnothing$$

lorsque U et V sont ouverts.

Si X n'est pas connexe, il existe des ouverts $U \neq \varnothing$ et $V \neq \varnothing$ tq

$$X = U \cup V \quad \text{et} \quad U \cap V = \varnothing \quad \Longrightarrow \quad U = X \setminus V \text{ est fermé.}$$

Bien sûr, $V = X \setminus U$ est fermé aussi. Donc, U et V sont ouverts et fermés simultanément.

Exemple (non-exemples)

- $(X, \mathcal{T}^{discr})$ n'est pas connexe (si X contient au moins 2 points) : $X = \{x_0\} \cup \big(X \setminus \{x_0\}\big)$.
- $(0,1) \cup (1,2)$ n'est pas connexe.

Lemme

Soit $A \subset X$ un sous-espace d'un espace topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *A est connexe par rapport a la topologie induite;*
2. *Pour tous ouverts U_1 U_2 de X tq*
$$A \subset U_1 \cup U_2 \qquad \textit{et} \qquad U_1 \cap U_2 \cap A = \varnothing, \tag{$*$}$$
on a soit $A \subset U_1$, soit $A \subset U_2$.

Démonstration.

1. $\Longrightarrow$ 2. Soient $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_X$ tq $(*)$. Désignons $V_j := U_j \cap A \in \mathcal{T}_A$. Alors,
$$A = V_1 \cup V_2 \quad \text{et} \quad V_1 \cap V_2 = \varnothing \qquad \Longrightarrow \qquad V_1 = \varnothing \quad \text{ou} \quad V_2 = \varnothing.$$
Donc, $A \subset U_2$ ou $A \subset U_1$.

2. $\Longrightarrow$ 1. Soient $V_1, V_2 \in \mathcal{T}_A$ tq
$$A = V_1 \cup V_2 \quad \text{et} \quad V_1 \cap V_2 = \varnothing. \tag{$**$}$$
Alors, il existe $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_X$ tq $V_j = U_j \cap A$. $(**) \implies (*) \implies$ $A \subset U_1$ ou $A \subset U_2 \implies V_2 = \varnothing$ ou $V_1 = \varnothing$. □

Proposition

$[0,1]$ *est connexe.*

Démonstration.

Supposons que $[0,1]$ est non-connexe. Alors, $[0,1] = U \cup V$, où $U \neq \varnothing$ et $V \neq \varnothing$ sont ouverts <u>et</u> fermés. En outre, on peut supposer que $0 \in U$.

Posons
$$\tau := \sup \left\{ t \in [0,1] \mid [0,t] \subset U \right\}.$$

Cas A : $\tau = 1$. Puisque τ est un point limite de U et U est fermé, $\tau \in U$. Puisque U est ouvert, $\exists \varepsilon > 0$ tq $(1-\varepsilon, 1] \subset U$. De plus, puisque $\tau = 1$, $\exists t > 1 - \varepsilon$ tq $[0,t] \subset U$. Alors, on a que
$$[0,1] = [0,t] \cup (1-\varepsilon, 1] \subset U \qquad \Longrightarrow \qquad V = \varnothing.$$
Contradiction.

Cas B : $\tau < 1$. On peut supposer que $\tau > 0$ (Pourquoi ?). La démonstration de cas A implique que $\tau \in U$. Puisque U est ouvert, $\exists \varepsilon > 0$ tq $(\tau - 2\varepsilon, \tau + 2\varepsilon) \subset U \implies [0, \tau + \varepsilon] \subset U \implies \tau \neq \sup$. Contradiction aussi. □

Remarque

La même démonstration montre que on fait chaque intervalle

$$[a, b], \quad (a, b], \quad [a, b) \quad \text{et} \quad (a, b) \tag{$*$}$$

est connexe. En fait, un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est connexe (par rapport à la topologie induite) ssi A est un intervalle, càd

$$a_0, a_1 \in A, \quad a_0 \leq a_1 \qquad \Longrightarrow \qquad [a_0,\ a_1] \subset A. \tag{$**$}$$

Exercice

Montrer que $(**)$ implique que A est l'un des éléments de la liste $(*)$, où on admet aussi des intervalles (semi-)infinis, par exemple $(-\infty, b]$.