La compacité de produites

Théorème

Soit X, Y deux espaces topologiques. Alors le produit $X \times Y$ est compact ssi X et Y sont tous les deux compacts.

Démonstration.

Supposons que $X \times Y$ est compact. Puisque p_1 est continue, $X = p_1(X \times Y)$ est compact en tant que l'image d'un espace compact.

Supposons que X et Y sont compacts. Soit $\mathcal{W}$ un recouvrement ouvert de $X \times Y$. Soit $x \in X$ fixé. Puisque $\mathcal{W}$ est un recouvrement de $X \times Y$, $\forall\, y \in Y$ $\exists\, W(y) \in \mathcal{W}$ tq $(x, y) \in W(y)$. Par définition de la topologie produit, $\exists\, U(y) \subset X$ et $\exists V(y) \subset Y$ tq

$$(x, y) \in U(y) \times V(y) \subset W(y).$$

La collection $\{V(y) : y \in Y\}$ est un recouvrement ouvert de Y. La compacité de Y implique qu'il existe un sous-recouvrement fini, disons $V(y_1), \ldots, V(y_r)$. Posons

$$U(x) = U(y_1) \cap \cdots \cap U(y_r).$$

Démonstration (suite).

Alors pour tout $i = 1, \ldots, r$,

$$U(x) \times V(y_i) \ \subset\ U(y_i) \times V(y_i) \ \subset\ W(y_i)$$

Donc

$$U(x) \times Y \ \subset\ U(x) \times \bigcup_{i=1}^{r} V(y_i) \ \subset\ \bigcup_{i=1}^{r} W(y_i)$$

Maintenant la collection $\{U(x) : x \in X\}$ est un recouvrement ouvert de X. Il existe donc un sous-recouvrement fini $\{U(x_1), \ldots, U(x_s)\}$. Chaque sous-espace $U(x_i) \times Y$ est recouvert par un nombre fini d'ouvert du recouvrement $\mathcal{W}$. Donc $X \times Y$, étant la réunion (finie) des $U(x_i) \times Y$ pour $1 \leq i \leq s$, est aussi recouvert par un nombre fini d'éléments du recouvrement $\mathcal{W}$.

□

Critère automatique d'homéomorphisme

Nous avons déjà vu qu'en général

$$f\colon X \to Y \text{ est continue et bijective} \qquad \not\Longrightarrow \qquad f^{-1} \text{ est continue.}$$

Cependant, on a le résultat suivant :

Proposition

Soit $f\colon X \to Y$ une bijection continue. Si X est compact et Y est Hausdorff, alors f est un homéomorphisme.

Démonstration.

Soit G un fermé de X. Puisque G est fermé dans X qui est compact, alors G est compact. Comme f est continue, $f(G)$ est aussi compact. Puisque Y est Hausdorff, $f(G)$ est un fermé de Y. Ainsi, f est une application fermée et, donc, un homéomorphisme. □

En tant qu'application, on a le résultat suivant.

Proposition

L'espace quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est homéomorphe à l'ensemble $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration.

On définit l'application

$$\varphi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1, \qquad [x] \mapsto e^{2i\pi x}.$$

On a déjà vu que φ est continue et bijective. Comme $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est compact et S^1 est Hausdorff, φ est alors un homéomorphisme. □

Exercice

1. Considérons l'opération du groupe $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{R}^2$:
$$(n,m)\cdot(x,y) = (x+n,\ y+m).$$
Prouver que $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est homéomorphe au tore $\mathbb{T}$. De plus, prouver que le tore est homéomorphe à $S^1 \times S^1$ muni de la topologie produit.
2. Prouver que $S^2/\{\pm 1\}$ est homéomorphe au plan projectif.

La compacité dans $\mathbb{R}^n$

Définition

Un sous-ensemble $A \subset M$ d'un espace métrique est dit borné s'il existe $R > 0$ et $m_0 \in M$ tq $A \subset B(m_0, R)$.

Exercice

Montrer que A est borné ssi une des propriétés suivantes est vérifiée :

- $\forall m_0 \in M \quad \exists R = R_{m_0}$ tq $A \subset B_R(m_0)$.
- $\exists C > 0$ tq pour tout $x, y \in A$, $d(x,y) \leq C$.

Proposition

Soit M un espace métrique. Si $K \subset M$ est compact, alors K est borné et fermé.

Démonstration.

Puisque pour tout $m_0 \in M$ la fonction $K \to \mathbb{R}, \quad K \ni m \mapsto d(m, m_0)$ est continue, alors elle est bornée, càd que K est bornée. K est fermé en tant qu'un sous-ensemble compact d'un espace Hausdorff. □

Théorème

Un sous-ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ est compact ssi K est borné et fermé.

Démonstration.

Soit K borné par rapport à la métrique d_∞ ($\Leftrightarrow$ K est borné par rapport à la métrique euclidienne puisque les deux métriques sont équivalentes). Alors, il existe $R > 0$ tq $d_\infty(m, 0) \leq R$, càd

$$K \subset [-R, R]^n.$$

$[-R, R]^n$ est compact en tant que le produit de sous-ensembles compacts. Puisque K est un sous-ensemble fermé, alors K est compact. □

Remarque

En général, un sous-ensemble borné et fermé d'un espace métrique quelconque n'est pas compact. Par exemple, un sous-ensemble A quelconque d'un espace discret est toujours borné et fermé. Cependent, A n'est pas compact si A est infini.

Les normes sur $\mathbb{R}^n$

Définition

Soit $(E, +)$ un espace vectoriel. Une *norme sur E* est une application $N : E \to [0, +\infty)$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- Pour $x \in E$, $N(x) = 0 \iff x = 0$
- (Inégalité triangulaire) $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ pour tous $x, y \in E$.
- (Homogénéité) $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$.

Exemple

Les normes suivantes sont des exemples classiques sur $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$:

- $$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n;$$
- $$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n$$
- $$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n$$

Exercice

Supposons que N est une norme sur E. Montrer que $d_N(x,y) = N(x-y)$ définit une métrique sur E. Donc, tout espace vectoriel normé est un espace métrique.

Théorème

Soient N_1 et N_2 des normes sur $\mathbb{R}^n$. Alors N_1 et N_2 sont équivalentes, càd qu'il existe des constante $A, B > 0$ tq

$$A\, N_2(x) \leq N_1(x) \leq B\, N_2(x) \qquad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

En particulier, si N est une norme sur $\mathbb{R}^n$, la topologie métrique associée à la distance $d_N(x,y) = N(x-y)$ coïncide avec la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration.

Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$ quelconque. Il suffit de montrer que N est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$ parce que

$$N_1(x) \leq B\|x\|_\infty \quad \text{et } \|x\|_\infty \leq \frac{1}{A} N_2(x) \qquad \Longrightarrow \qquad N_1(x) \leq \frac{B}{A} N_2(x).$$

$\square$

Démonstration (suite).

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base standard de $\mathbb{R}^n$. Désignons $C := \sum_{i=1}^n N(e_i) > 0$.

$$N(x) = N\Big(\sum x_i e_i\Big) = \sum |x_i| N(e_i) \leq \sum \|x\|_\infty N(e_i) \leq C\|x\|_\infty.$$

En remplaçant x par $x-y$, on obtient $N(x-y) \leq C\|x-y\|_\infty$. Donc, $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue par rapport à d_∞. Puisque

$$S_\infty := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty = 1 \right\}$$

est borné et fermé (pourquoi ?), alors S_∞ est compact. Donc, la restriction de N sur S_∞ atteint son minimum $A := \inf\left\{N(x) \mid x \in S_\infty\right\} = N(x_0) > 0$. Ainsi, si $x \neq 0$, on a que

$$A \leq N\Big(\frac{x}{\|x\|_\infty}\Big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad A\|x\|_\infty \leq N(x).$$

$\square$

Attention

Le théorème implique que les métriques d_{N_1} et d_{N_2} sont équivalantes si N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}^n$ quelconques. Cependant, le théorème n'implique pas que toutes les distances sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes !

Compacité par suites

Définition

Un sous-espace $K \subset M$ d'un espace métrique est dit *séquentiellement compact* si toute suite $(x_n) \subset K$ possède une sous-suite qui converge vers un point de K.

Théorème

Un sous-espace $K \subset M$ d'un espace métrique est compact ssi K est séquentiellement compact.

La preuve de ce théorème consiste en plusieurs étapes.

Lemme

Soit $(x_n) \subset X$ une suite dans un espace métrique. Écrivons $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Supposons que x est un point limite de S. Alors il existe une sous-suite de (x_n) qui converge vers x.

La preuve découle du fait suivant : tout point limite de A est la limite d'une suite (a_k) tq $a_k \in A$. Détails : *Fine, Bertelson, Premoselli. Intro à la topologie.*

Proposition

Soit $K \subset M$ un sous-espace compact d'un espace métrique. Alors K est séquentiellement compact.

Démonstration.

Si S est fini, il doit exister au moins un point $x \in K$ qui est répété un nombre infini de fois dans (x_n). Ainsi, dans ce cas-là, il existe une sous-suite constante, alors convergente.

Supposons que S est infini. Il suffit de démontrer que S a un point limite dans K. Supposons qu'il n'existe pas de point limite de S dans K. Donc, $\forall x \in K \quad \exists \varepsilon(x) > 0$ tq $S \cap \left(B_{\varepsilon(x)}(x) \setminus \{x\}\right) = \varnothing$. Considérons

$$\mathcal{U} = \left\{B_{\varepsilon(x)}(x) \mid x \in K\right\}.$$

La compacité de K implique qu'il existe un sous-recouvrement fini :

$$K \subset B_{\varepsilon(x_1)}(x_1) \cup \cdots \cup B_{\varepsilon(x_r)}(x_r).$$

Mais les boules contiennent chacune au plus un point de S donc, ensemble, elles ne contiennent pas plus que r points de S. Ceci contredit le fait que S est infini. $\square$

Corollaire (Bolzano–Weierstrass)

Soit $(x_n) \subset \mathbb{R}^n$ une suite bornée. Alors elle possède une sous-suite convergente.

Démonstration.

Par l'hypothèse, $\exists R > 0$ tq $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \bar{B}_R(0)$. Alors,

$$\bar{S} \subset \overline{\bar{B}_R(0)} = \bar{B}_R(0),$$

parce que $\bar{B}_R(0)$ est fermé. Puisque $\bar{S}$ est borné et fermé, alors $\bar{S}$ est compact par Heine–Borel. Ainsi, (x_n) possède une sous-suite convergente. $\square$

Lemme (A)

Soit M un espace métrique séquentiellement compact et soit $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ un recouvrement ouvert de M. Alors il existe un $r > 0$ avec la propriété suivante : $\forall m \in M \;\; \exists U = U_{i(m)} \in \mathcal{U} \;$ tq $\; B_r(m) \subset U$.

Démonstration.

Supposons qu'un tel $r > 0$ n'existe pas. Alors, $\forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists m_n \in M$ tq $B_{1/n}(m_n) \not\subset U_i$ pour tout $i \in I$. Puisque M est séquentiellement compact, la suite (m_n) possède une sous-suite (m_{n_k}) qui converge vers un $m \in M$. Puisque $\mathcal{U}$ est un recouvrement, il existe $U_i \in \mathcal{U}$ tq $m \in U_i$. Alors, $\exists r > 0$ tq $B_r(m) \subset U_i$ parce que U_i est ouvert.

Maintenant, prenons k si grand que $d(m_{n_k}, m) < r/2$ et $1/n_k < r/2$. On a

$$B_{1/n_k}(m_{n_k}) \subset B_r(m)$$

parce que

$$m' \in B_{1/n_k}(m_{n_k}) \implies d(m, m') \leq d(m, m_{n_k}) + d(m_{n_k}, m') < r/2 + 1/n_k < r.$$

Ainsi, on obtient une contradiction, parce que $B_{1/n_k}(m_{n_k}) \subset B_r(m) \subset U_i$. $\square$

Lemme (B)

Soit (m_n) *une suite dans un espace métrique. Si* (m_n) *converge, alors* (m_n) *est une suite de Cauchy, càd* $\forall\,\varepsilon > 0\ \ \exists N > 0\ \ tq\ \ d(m_p, m_q) < \varepsilon$ *lorsque* $p, q \geq N$.

La démonstration est laissée au lecteur.

Lemme (C)

Soit M *un espace métrique séquentiellement compact et* $r > 0$ *quelconque. Alors, il existe un sous-ensemble fini* $\{m_1, \ldots, m_p\} \subset M$ *tq*

$$\bigcup_{i=1}^{p} B_r(m_i) = M.$$

Démonstration.

Supposons qu'aucune collection finie de boules $\left\{B_r(m_i) \mid 1 \leq i \leq p\ \right\}$ n'est pas un recouvrement de M. Donc, $\forall m_1 \in M\ \ \exists m_2 \in M \smallsetminus B_r(m_1)$. Puisque $M \neq B_r(m_1) \cup B_r(m_2)$, $\exists m_3 \in M \smallsetminus \big(B_r(m_1) \cup B_r(m_2)\big)$. Ainsi, on obtient une suite m_n avec la propriété suivante :

$$m_n \notin B_r(m_1) \cup \cdots \cup B_r(m_{n-1}).$$

Puisque M est séquentiellement compact, il existe une sous-suite (m_{n_k}) convergent. Mais (m_{n_k}) n'est pas une suite de Cauchy parce que $d(m_{n_k}, m_{n_{k-1}}) \geq r$. Ceci est une contradiction. □

Corollaire

Si M est un espace métrique séquentiellement compact, alors M est compact.

Démonstration.

Soit $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ un recouvrement ouvert quelconque. Soit $r > 0$ donné par le lemme A. Pour ce r, on peut choisir un recouvrement fini :

$$\{B_r(m_1), \ldots, B_r(m_n)\}.$$

Puisque $B_r(m_j) \subset U_{i(j)}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, la collection

$$\{U_{i(1)}, \ldots, U_{i(n)}\}$$

est un sous-recouvrement de $\mathcal{U}$. □