

# LE GROUPE FONDAMENTAL

**Question :** Étant donné deux espaces topologiques, disons  $X$  et  $Y$ , comment peut-on décider s'ils sont homéomorphes ou non ?

Il n'y a pas de méthode générale. Une possibilité est de procéder de la manière suivante.

*Une considération naïve.* On choisit un espace simple, par exemple le cercle  $S^1$ . Si les espaces  $C^0(S^1, X)$  et  $C^0(S^1, Y)$  sont différents, alors  $X$  et  $Y$  ne sont pas homéomorphes. Cela soulève la question suivante :

**Question :** Comment peut-on décider si les espaces  $C^0(S^1, X)$  et  $C^0(S^1, Y)$  sont différents ?

Parfois, on peut démontrer que les composants connexes (par arcs) de  $C^0(S^1, X)$  et  $C^0(S^1, Y)$  sont différents. Par exemple, si on peut démontrer que  $C^0(S^1, X)$  est connexe par arcs et  $C^0(S^1, Y)$  n'est pas connexe par arcs, on conclut que  $X$  et  $Y$  ne sont pas homéomorphes.

C'est cette approche qui se révèle effective et que nous décrivons ici plus en détail.

1/13

Soit  $X$  un espace topologique quelconque. Nous rappelons qu'un arc joignant  $x_0 \in X$  et  $x_1 \in X$  est une application  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  continue tq  $\gamma(0) = x_0$  et  $\gamma(1) = x_1$ . On note  $I := [0, 1]$ .

## Définition

Deux arcs  $\gamma_0, \gamma_1: I \rightarrow X$  tq  $\gamma_0(0) = x_0 = \gamma_1(0)$  et  $\gamma_0(1) = x_1 = \gamma_1(1)$  sont dits *homotopes relativement à  $\{0, 1\}$*  s'il existe une application continue  $h: I \times I \rightarrow X$  avec les propriétés suivantes :

1.  $h(t, 0) = \gamma_0(t)$  pour tout  $t \in I$ ;
2.  $h(t, 1) = \gamma_1(t)$  pour tout  $t \in I$ ;
3.  $h(0, s) = x_0$  pour tout  $s \in I$ ;
4.  $h(1, s) = x_1$  pour tout  $s \in I$ .

L'application  $h$  qui apparaît dans la définition ci-dessus s'appelle *une homotopie* entre  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$ .

Si  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  sont homotopes, on écrit  $\gamma_0 \simeq \gamma_1 \text{ rel } \{0, 1\}$  (ou, simplement  $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ ).

2/13

Si on définit  $\gamma_s : I \rightarrow X$  par  $\gamma_s(t) = h(t, s)$ , on peut penser de la famille  $\{\gamma_s \mid s \in I\}$  comme un arc (dans  $C^0(I, X)$ ) joignant  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$ . Alors, informellement,  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  sont homotopes, si on peut déformer continûment  $\gamma_0$  vers  $\gamma_1$  (en préservant les extrémités).

### Proposition

Si  $X$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  convexe, alors tous les arcs (joignant  $x_0$  et  $x_1$ ) sont homotopes.

### Démonstration.

Posons

$$h(t, s) := (1 - s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t).$$

Une vérification directe montre que c'est une homotopie entre  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$ . □

3/13

### Lemma

$\simeq \text{rel } \{0, 1\}$  est une relation d'équivalence sur l'ensemble de tous les arcs dans  $X$  joignant  $x_0$  et  $x_1$ .

### Démonstration.

La réflexivité est évidente.

Si  $h$  est une homotopie entre  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$ , alors  $\hat{h}(t, s) := h(t, 1 - s)$  est une homotopie entre  $\gamma_1$  et  $\gamma_0$ . Donc,  $\simeq$  est symétrique.

Soient  $h$  une homotopie entre  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  et  $\tilde{h}$  une homotopie entre  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , donc

$$\tilde{h}(t, 0) = \gamma_1(t) \quad \text{et} \quad \tilde{h}(t, 1) = \gamma_2(t)$$

(de plus, on a toujours que les extrémités sont préservées). On définit

$$H(t, s) := \begin{cases} h(t, 2s) & \text{si } s \in [0, 1/2], \\ \tilde{h}(t, 2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Puisque  $h(t, 1) = \gamma_1(t) = \tilde{h}(t, 0)$ , l'application  $H$  est continue. De plus,  $H$  préserve les extrémités. Ainsi,  $H$  est une homotopie entre  $\gamma_0$  et  $\gamma_2$  qui montre la transitivité. □/13

# PRODUIT

Soit  $\gamma$  un arc joignant  $x_0$  et  $x_1$ ; soit  $\beta$  un arc joignant  $x_1$  et  $x_2$ . On définit un arc  $\gamma * \beta$  par

$$\gamma * \beta(t) := \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2], \\ \beta(2t - 1) & \text{si } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Notons que  $\gamma * \beta$  est continu et joigne  $x_0$  à  $x_2$ .

## Remarque

« Le produit »  $\gamma * \beta$  est bien défini seulement si  $\gamma(1) = \beta(0)$ !

## Lemme

Si  $\gamma_0 \simeq \gamma_1 \text{ rel } \{0, 1\}$  et  $\beta_0 \simeq \beta_1 \text{ rel } \{0, 1\}$ , alors

$$\gamma_0 * \beta_0 \simeq \gamma_1 * \beta_1 \text{ rel } \{0, 1\}.$$

La démonstration est à vous comme exercice.

5/13

Soit  $X$  un espace topologique quelconque. On choisit  $x_0 \in X$ . Considérons

$$\Omega(X, x_0) := \{ \gamma \text{ est un arc dans } X \text{ joignant } x_0 \text{ à } x_1 = x_0 \}.$$

Tout élément  $\gamma$  de  $\Omega(X, x_0)$  s'appelle un lacet (base en  $x_0$ ). Un lacet est simplement une application continue  $\gamma : S^1 \rightarrow X$  tq  $\gamma(0) = x_0 = \gamma(1)$ , ou on pense de  $S^1$  comme  $[0, 1] / \sim$ .

## Définition

L'ensemble

$$\pi_1(X, x_0) = \Omega(X, x_0) / \simeq$$

s'appelle le *groupe fondamental* de  $X$  (base en  $x_0$ ).

Notons qu'à ce stade,  $\pi_1(X, x_0)$  est bien défini seulement comme un ensemble. On va justifier le nom plus tard.

Si  $\gamma$  est un lacet,  $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$  s'appelle la classe d'équivalence de  $\gamma$ . On peut voir  $[\gamma]$  comme la composante connexe par arcs de  $\gamma$  dans  $\Omega(X, x_0)$  (nous n'essayons pas ni de prouver cela ni même de définir une topologie sur  $\Omega(X, x_0)$ ).

6/13

## Théorème

$\pi_1(X, x_0)$  est un groupe par rapport à la multiplication

$$[\gamma_1] \cdot [\gamma_2] := [\gamma_1 * \gamma_2]. \quad (*)$$

On va prouver ce théorème en plusieurs étapes.

**Étape 1.** Soit  $\gamma$  un lacet et  $\rho: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  une application continue tq  $\rho(0) = 0$  et  $\rho(1) = 1$ . Alors,  $[\gamma \circ \rho] = [\gamma]$ .

En effet,  $h(t, s) = \gamma((1-s)t + s\rho(t))$  est une homotopie.

**Étape 2.** Le produit  $(*)$  est bien défini et associatif.

On a déjà démontré que l'application  $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  donnée par  $(*)$  est bien défini. Pour démontrer l'associativité, on observe d'abord que

$$(a * \beta) * \gamma(t) = \begin{cases} \alpha(4t) & \text{si } t \in [0, 1/4], \\ \beta(4t - 1) & \text{si } t \in [1/4, 1/2], \\ \gamma(2t - 1), & \text{si } t \in [1/2, 1], \end{cases}$$

7/13

et

$$\alpha * (\beta * \gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2], \\ \beta(4t - 2) & \text{si } t \in [1/2, 3/4], \\ \gamma(4t - 3), & \text{si } t \in [3/4, 1]. \end{cases}$$

On peut vérifier que

$$(a * \beta) * \gamma = ((a * \beta) * \gamma) \circ \rho,$$

ou

$$\rho(t) = \begin{cases} t/2, & \text{si } t \in [0, 1/2], \\ t - 1/4, & \text{si } t \in [1/2, 3/4], \\ 2t - 1, & \text{si } t \in [3/4, 1]. \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned} ([\alpha][\beta])[\gamma] &= [\alpha * \beta][\gamma] = [(\alpha * \beta) * \gamma] = [\alpha * (\beta * \gamma)] \\ &= [\alpha][\beta * \gamma] = [\alpha]([\beta][\gamma]). \end{aligned}$$

8/13

**Étape 3.** Il existe un élément neutre dans  $\pi_1(X, x_0)$  par rapport au produit  $(*)$ .

Soit  $x_0$  le lacet constant, càd l'application constante  $I \rightarrow X_0, t \mapsto x_0$ . Pour un lacet  $\gamma$ , on a

$$(\gamma * x_0)(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2], \\ x_0 & \text{si } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Si on définit  $\rho$  par

$$\rho(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } t \in [0, 1/2], \\ 1 & \text{si } t \in [1/2, 1], \end{cases}$$

on a évidemment que  $\gamma \circ \rho = \gamma * x_0$ . Ainsi,

$$[\gamma] = [\gamma * x_0] = [\gamma][x_0].$$

De la même manière, on obtient  $[x_0][\gamma] = [\gamma]$ . Par conséquent,  $[x_0]$  est l'élément neutre dans  $\pi_1(X, x_0)$ .

9/13

**Étape 4.** Nous prouvons l'existence d'un inverse.

Pour un lacet  $\gamma$ , on définit

$$\bar{\gamma}(t) := \gamma(1 - t).$$

On va prouver que  $\gamma * \bar{\gamma} \simeq x_0 \simeq \bar{\gamma} * \gamma$ . En effet, considérons

$$h(t, s) := \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \in [0, s/2], \\ \gamma(s) & \text{si } t \in [s/2, 1 - s/2], \\ \gamma(2 - 2t) & \text{si } t \in [1 - s/2, 1]. \end{cases}$$

Puisque  $h(t, 0) = x_0$  et  $h(t, 1) = \gamma * \bar{\gamma}(t)$ , on obtient que  $\gamma * \bar{\gamma} \simeq x_0$ . De la même manière, on a  $\bar{\gamma} * \gamma \simeq x_0$ . Ainsi,

$$[\gamma]^{-1} = [\bar{\gamma}] \in \pi_1(X, x_0)$$

est l'élément inverse de  $[\gamma]$ .

En résumé, les étapes 1 – 4 montrent que  $\pi_1(X, x_0)$  est un groupe.

10/13

## Proposition

Si  $X \subset \mathbb{R}^n$  est convexe, alors  $\pi_1(X, x_0) \cong \{1\}$  pour tout  $x_0 \in X$ .

## Proposition

Si  $X$  est connexe par arcs, alors  $\pi_1(X, x_0)$  et  $\pi_1(X, x_1)$  sont isomorphes pour tous  $x_0, x_1 \in X$ .

On peut trouver une démonstration dans *Gamelin, Greene. Introduction to topology, Theorem 3.3*.

Si  $X$  est connexe par arcs, on note par  $\pi_1(X)$  la classe d'isomorphisme du groupe  $\pi_1(X, x_0)$ . Parfois, on dit que  $\pi_1(X)$  est le groupe fondamental de  $X$  même si ce n'est pas tout à fait correct.

11/13

## HOMOMORPHISMES INDUITS

Soit  $f: X \rightarrow Y$  une application continue tq  $f(x_0) = y_0 \in Y$ . Définissons

$$f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0) \quad \text{par} \quad f_*[\gamma] = [f \circ \gamma].$$

## Théorème

L'application  $f_*$  est bien définie. En fait,  $f_*$  est un homomorphisme de groupes. De plus, si  $g: Y \rightarrow Z$  est une autre application continue, on a

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

## Démonstration.

Si  $h$  est une homotopie entre  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$ , alors  $f \circ h$  est une homotopie entre  $f \circ \gamma_0$  et  $f \circ \gamma_1$ . Par conséquent,  $f_*$  est bien défini.

Si  $\gamma$  et  $\beta$  sont deux lacets, on a

$$f \circ (\gamma * \beta)(t) = \begin{cases} f \circ \gamma(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ f \circ \beta(2t - 1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases} = (f \circ \gamma) * (f \circ \beta)(t).$$

□

12/13

## Démonstration (suite).

Par conséquent,

$$f_*([\gamma][\beta]) = (f_*[\gamma])(f_*[\beta]),$$

càd que  $f_*$  est un homomorphisme de groupes.

La propriété  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$  découle immédiatement de la définition de  $f_*$ . □

## Corollaire

*Si  $f$  est un homéomorphisme, alors  $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$  est un isomorphisme.*

## Démonstration.

Si  $f$  est un homéomorphisme, alors  $\exists g: Y \rightarrow X$  tq  $f \circ g = id_Y$  et  $g \circ f = id_X$  (bien sûr,  $g = f^{-1}$ ). En utilisant le théorème précédent, on obtient

$$f_* \circ g_* = (id_Y)_* = id: \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0) \quad \text{avec} \quad y_0 = f(x_0) \quad \text{et}$$

$$g_* \circ f_* = id: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0).$$

Ainsi,  $f_*$  est un isomorphisme. □